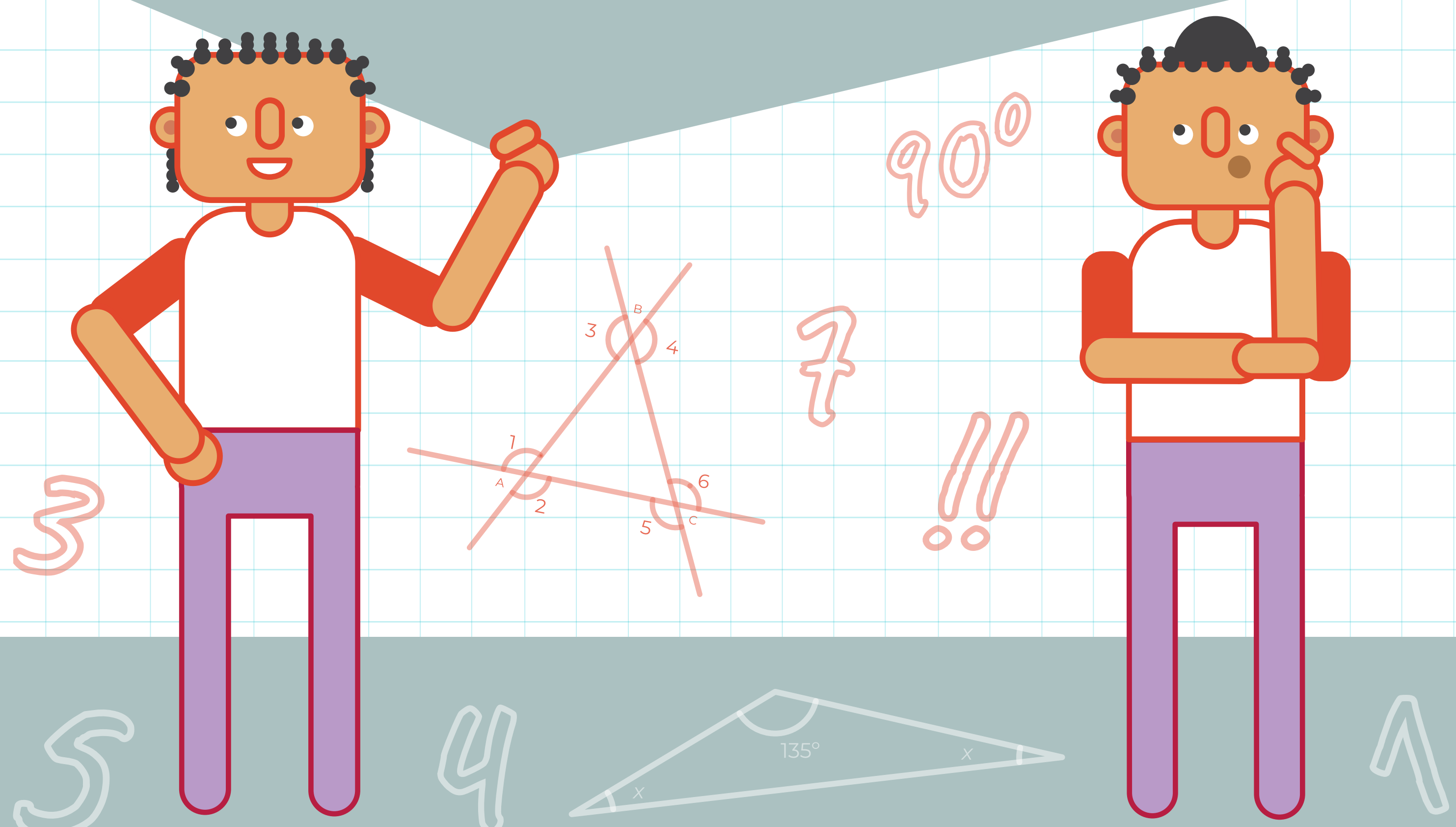
MATEMÁTICA 7º Ano

Manual do (a) aluno (a)



Matemática

7º ANO

MANUAL DO(A) ALUNO(A)

MATEMÁTICA
7º ano
Manual do(a) aluno(a)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO | GOVERNO DE CABO VERDE — A TRABALHAR PARA TODOS.

Autores
João Almeida Duarte
Vanda Duarte Delgado

Capa e Design Gráfico
Oficina de Utopias

Ilustração
Oficina de Utopias - Gilardi Reis

Revisão Científico-pedagógica
Paulino Fortes, Luísa Cardoso Monteiro e Maria de Lourdes Semedo

Revisão Linguística
Adelcise Ramos, Ana Santos e Maria Antónia Varela

Coordenação Geral
Direção Nacional de Educação

Impressão e Acabamento
Porto Editora

Edição
2020

Este Livro respeita as regras do Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

INTRODUÇÃO

Caro (a) aluno (a),

Este manual é para ti, que vais inciar o 7º ano de escolaridade.

Na sequência dos manuais anteriores, apresentamos, agora, o do 7º ano, pois consideramos necessário que disponhas, também, de um instrumento atraente e adequado à tua idade, capaz de suscitar-te o gosto pela tua aprendizagem na disciplina de matemática.

De acordo com as orientações programáticas, procuramos orientá-lo(la), tendo em conta os conhecimentos já adquiridos. Apresentamos, no início de cada unidade, algumas atividades que te permitem, por um lado, relembrar conceitos matemáticos estudados em anos anteriores e, por outro lado, participar ativamente na construção dos teus próprios conhecimentos.

Ao longo deste manual vais encontrar os conteúdos adaptados à tua realidade, atividades de revisão, fazendo sempre a ponte com as aprendizagens anteriores; outras atividades de exercícios e problemas e, também, atividades de consolidação.

Em algumas unidades, nomeadamente, na geometria, tivemos necessidade de recorrer a softwares, entre os quais o GeoGebra, a fim de tornar as demonstrações mais simples.

Elaboramos este manual e esperamos que o mesmo possa contribuir de modo eficaz para o teu processo de ensino/aprendizagem.

Desejamos-te, um excelente ano letivo.

Os autores

APRESENTAÇÃO DO MANUAL

Este manual foi elaborado com base no programa do 7° ano, e está estruturado em cinco unidades, nas quais são tratados conteúdos relacionados com os grandes temas que vens trabalhando, a saber: Números e Operações; Geometria e Medida; Organização e Tratamento de Dados e Álgebra.

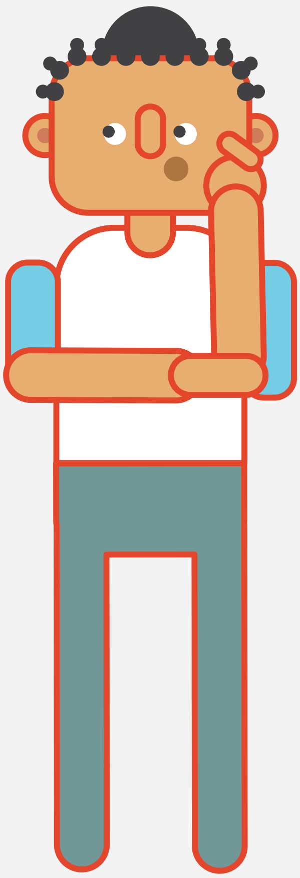
Em cada unidade, vais encontrar:

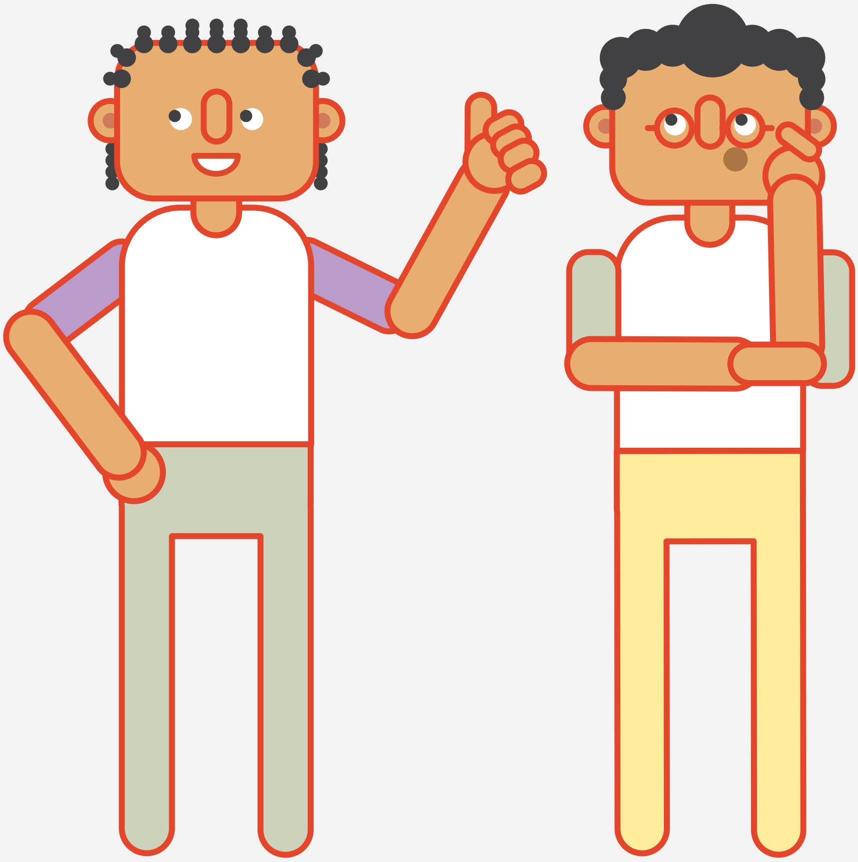
- Atividades de diagnóstico e problemas, através dos quais poderás explorar os conteúdos e descobrir novos conhecimentos. Estes podem ser resolvidos individualmente ou em grupo;

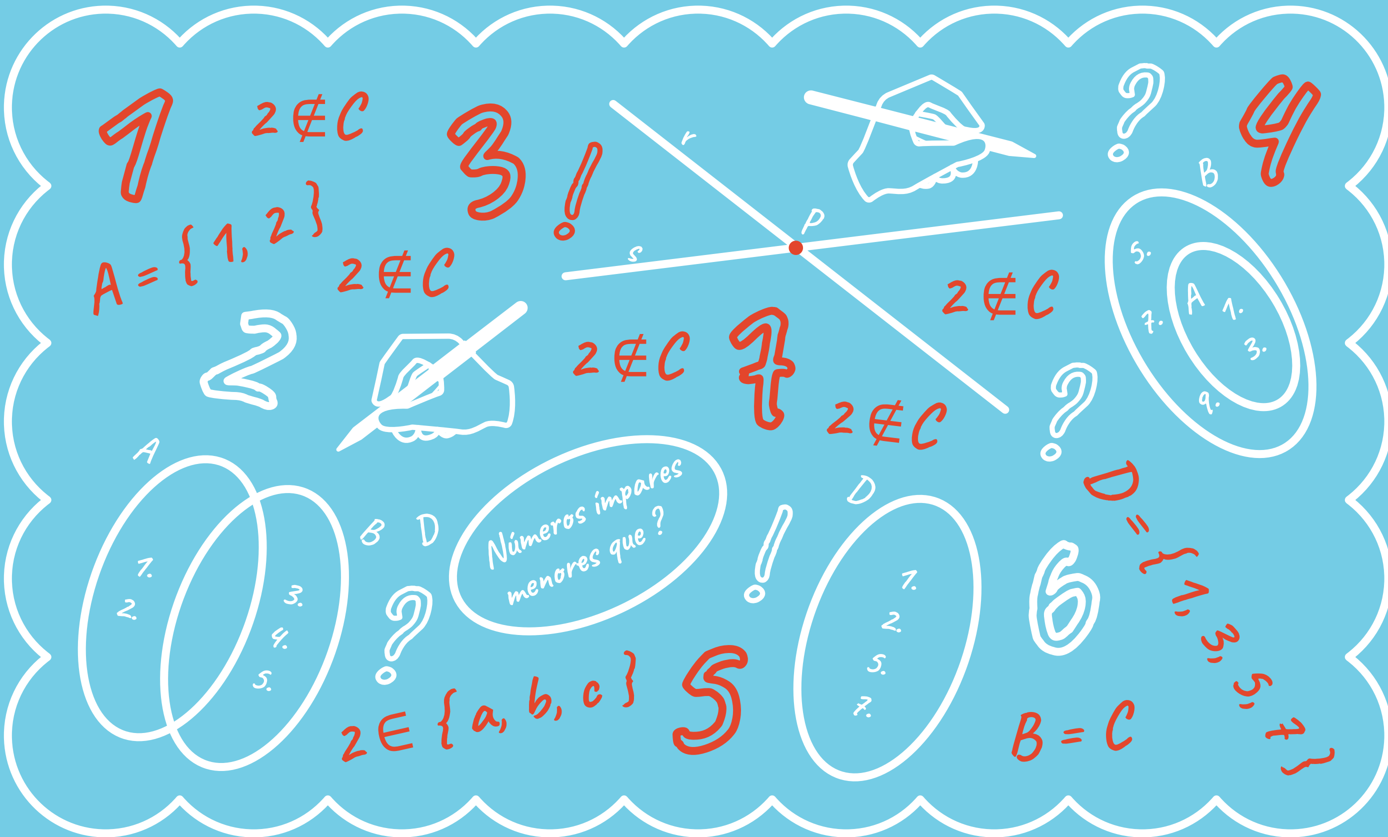
- Atividades de consolidação que integram questões diversificadas para desenvolveres e consolidares os conhecimentos adquiridos.

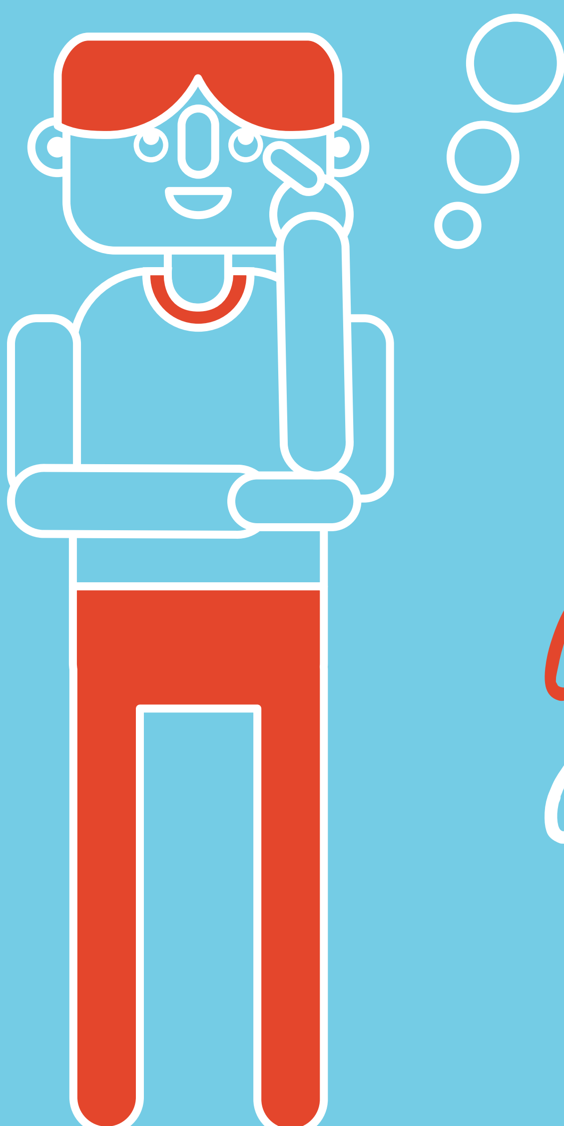
ÍNDICE

• Para acesso rápido clique em cima do título das unidades









UNIDADE 1

Conjuntos

UNIDADE 1

CONJUNTOS

CONTEÚDOS:

Noção de conjunto
Modos de representar conjuntos
Formas de definir conjuntos
Relação de pertença
Conjunto universal
Cardinal de um conjunto
Conjunto singular e vazio
Relação de inclusão
Álgebra dos Conjuntos:

- Reunião
- Interseção
- Complementação
- Diferença

Propriedades das operações com conjuntos

OBJETIVOS:

- Definir conjuntos, segundo os princípios de compreensão e de extensão.
- Representar conjuntos em diagramas de Venn e usando chavetas.
- Distinguir a relação de pertença entre elementos e conjuntos da relação de inclusão entre conjuntos.
- Identificar conjunto vazio, conjunto singular e universo.
- Operar com conjuntos.
- Aplicar as propriedades das operações com conjuntos na resolução de problemas.
- Criar hábitos de trabalho e de persistência.
- Explicar e confrontar ideias, justificando os resultados obtidos através de procedimentos algébricos.
- Desenvolver a autoconfiança.

NOÇÃO DE CONJUNTO

Desde a tenra idade começaste por agrupar coisas que possuem caraterísticas semelhantes, em conjuntos como, por exemplo, um estojo de lápis de cores que, embora com lápis de cores diferentes, eles possuem uma caraterística em comum que é a sua utilização para colorir os desenhos.

A organização de objetos, ou entes, em conjuntos apresenta grandes vantagens, visto que assim é possível estudá-los todos ao mesmo tempo, proporcionando uma economia de tempo.
Os números são exemplos de entes que são agrupados em conjuntos e o seu estudo é muito importante para compreender as operações aritméticas e as propriedades que estudaste.

Recorda que os conjuntos são formados por entes com caraterísticas comuns, designados pelos seus **elementos**. Os elementos de um conjunto podem ser pessoas, números, animais, figuras geométricas, etc.
Usualmente, representamos os conjuntos pelas letras maiúsculas do nosso alfabeto.

MODOS DE REPRESENTAR CONJUNTOS

Os conjuntos podem ser representados usando chavetas ou usando diagramas de Venn.

Exemplos:

- O conjunto A, cujos elementos são os números 1, 2 e 3, pode ser representado por $A = \{1, 2, 3\}$

- O conjunto dos múltiplos de 4, menores que 20, pode ser representado por $B = \{4, 8, 12, 16\}$

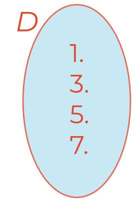
- O conjunto C, das ilhas de Cabo Verde, pode ser representado por C = { S. Antão, S. Vicente, S. Luzia, S. Nicolau, Sal, Boavista, Maio, Santiago, Fogo, Brava }

- O conjunto dos números inteiros relativos pode ser representado por

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

As reticências (...) representam os restantes elementos do conjunto.

- O conjunto D dos números ímpares, menores que 9, pode ser representado em Diagrama de Venn



RELAÇÃO DE PERTENÇA

Quando um dado ente ***b*** é elemento de um conjunto ***B***, dizemos que ***b*** **pertence** ao conjunto ***B***. Simbolicamente, representa-se por $b \in B$.

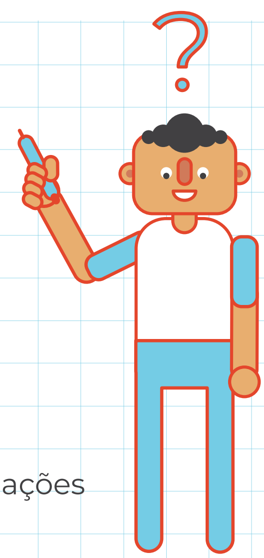
Exemplo:

Dado o conjunto $A = \{1, 2,3\}$, então $1 \in A$, $2 \in A$ e $3 \in A$.

4 pertence a A ?

Certamente que não. Então, neste caso, dizemos que 4 **não pertence** a A e escreve-se $4 \notin A$.

ATIVIDADES



1. Indica se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

1.1 $2 \in \{ a, b, c \}$.

1.2 $3 \in \{ -4, -2, 1, 3 \}$.

1.3 $0 \in \mathbb{Z}$.

2. Completa, utilizando os sinais de $\in$ e $\notin$, de forma a obteres as afirmações verdadeiras:

2.1 $5 \ldots\ldots \mathbb{Z}$.

2.2 $\frac{1}{4} \ldots\ldots \mathbb{N}$.

2.3 $0 \ldots\ldots \{ \}$.

2.4 $8 \ldots\ldots D_{16}$. (conjunto dos divisores de 16)

FORMAS DE DEFINIR UM CONJUNTO

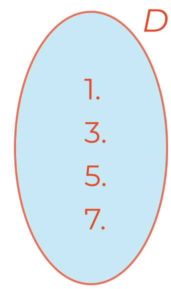
Existem duas formas de definir um conjunto:

Em Extensão, em que todos os elementos estão enumerados individualmente. Quando se usam chavetas para a sua representação, os elementos escrevem-se separados por vírgulas.

Exemplo:

$D = \{1, 3, 5, 7\}$

Quando se usa diagrama de Venn, os elementos são identificados por um ponto junto deles.



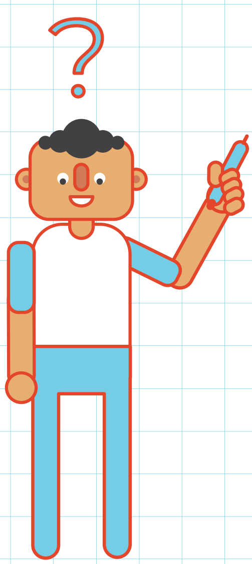
Em Compreensão, quando enunciamos uma propriedade comum a todos os elementos do conjunto.

Exemplos:

- D = { números ímpares menores que 9 } ou
- $D = \{x \in \mathbb{N} : x$ é número ímpar menor que $9\}$

que se lê: "Conjunto dos elementos de $\mathbb{N}$ **tais que** x é ímpar e menor que 9".

- Em diagrama de Venn :



ATIVIDADES

1. Representa em extensão os conjuntos:

1.1 $A = \{x \in \mathbb{N}: x$ é divisor de $18\}$.

1.2 $B = \{x \in \mathbb{N}:$ é um número natural par menor que $10\}$.

1.3 $C = \{x \in \mathbb{N}:$ múltiplo de 4 menor que $30\}$.

1.4 $D = \{x \in \mathbb{Z}: -2 < x \leq 3\}$.

2. Representa em compreensão os seguintes conjuntos:

2.1 $A = \{1, 2, 4, 8\}$.

2.2 $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

2.3 $C = \{9, 12, 15, 18, 21\}$.

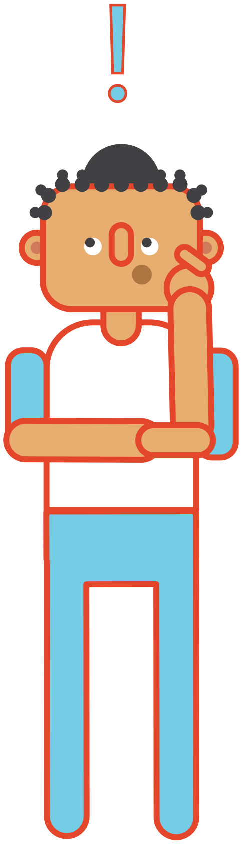
CONJUNTO SINGULAR, CONJUNTO VAZIO, UNIVERSO

Na tua escola, as turmas do 7° ano são constituídas de acordo com a idade dos alunos. Consideremos que numa turma de 25 alunos, as idades estão representadas na tabela abaixo:

Idade	Número de Alunos
12	15
13	9
14	1

De acordo com a tabela, indica o número de elementos de cada um dos seguintes subconjuntos de alunos da referida turma:
A = { alunos com 11 anos de idade }
B = { alunos com 14 anos de idade }

Resolução:
Para o conjunto A, tem-se que A não tem nenhum elemento, pois na turma não existem alunos com 11 anos de idade;
Para o conjunto B, tem-se que B é constituído por um único elemento, pois na turma existe um único aluno com 14 anos de idade.

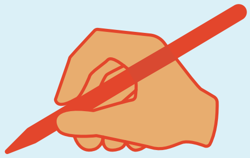


Considera os conjuntos seguintes:
$C = \{ x : x$ é múltiplo de 4 menor que 8 $\}$
$D = \{ x : x$ é um número natural menor que 1 $\}$
Representa-os em extensão e indica o número de elementos de cada um deles.

Resolução:
Para o conjunto C, tem-se que, $C = \{ 4 \}$ e é constituído por um único elemento. Neste caso dizemos, que C é um **conjunto singular**.

Repara que no conjunto D não existe nenhum número natural menor que 1, **logo *D* é** um conjunto sem elementos, ou seja, tem zero elementos. Por esta razão, dizemos que D é um **conjunto vazio**.
Um conjunto vazio representa-se por { } ou $\varnothing$
Assim, $D = \{ \}$ ou $D = \varnothing$.

Conjunto singular é um conjunto com apenas um elemento.
Conjunto vazio é um conjunto com zero elementos.



O universo, ou conjunto universal, que se representa por *U*, é o conjunto formado por todos os elementos com os quais se vai trabalhar para a resolução de um determinado problema.

Exemplos:

1. No problema de determinar a percentagem de positivas obtidas num teste de Matemática na tua turma, o universo é o conjunto formado por todos os alunos da turma.

2. No problema de determinar os múltiplos de um número natural, o universo considerado é o conjunto $\mathbb{N}$.

CARDINAL DE UM CONJUNTO. CONJUNTO FINITO E CONJUNTO INFINITO

Chama-se **cardinal** de um conjunto ao número de elementos que ele inclui.

O cardinal do conjunto *C* representa-se por $\#C$.

Por exemplo:

- se $A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$, então $\# A = 4$.
- se $B = \{ \quad \}$, então $\# B = 0$.

Considerando o seu cardinal, um conjunto pode ser:

- **Finito** quando podemos contar o número de elementos que ele possui.
- **Infinito** quando não podemos contar o número de elementos que ele possui.

Exemplos:

1. O conjunto dos alunos da turma é um conjunto finito.

2. O conjunto dos números naturais é um conjunto infinito.

ATIVIDADES

Dos conjuntos seguintes, indica os que são finitos e os que são infinitos:

a) { Números pares } ;

b) { Números ímpares menores que 20 } ;

c) { Habitantes de Cabo Verde }.

IGUALDADE DE CONJUNTOS, SUBCONJUNTOS E RELAÇÃO DE INCLUSÃO

IGUALDADE DE CONJUNTOS

Dois conjuntos, A e B, são iguais quando possuem os mesmos elementos. Escreve-se $A = B$.

Exemplo:
Dados os conjuntos
$A = \{1, 3, 5\}$ e
$B = \{x : x$ é um número natural ímpar menor que $7\}$,
temos que: $A = B$.

Os conjuntos $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e
$D = \{x \in \mathbb{Z} : -2 < x \leq 3\}$ também são iguais.
Justifica.

SUBCONJUNTOS E RELAÇÃO DE INCLUSÃO

Considera os conjuntos:
$A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$
Como podes observar, todo o elemento do conjunto A é também elemento do conjunto B.
Então, dizemos que o conjunto A é um subconjunto do conjunto B.

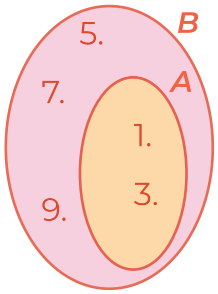
Se todo o elemento de um conjunto A pertence a um conjunto B, então A é denominado subconjunto de B.

Retomando os conjuntos anteriores, como A é subconjunto de B, podemos dizer que A está contido em B ou que B contém A.

Diz-se que um conjunto A está contido num conjunto B se e somente se todo o elemento de A é também elemento de B.

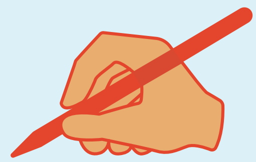
Simbolicamente, escreve-se:
$A \subset B$ que se lê "***A* está contido em *B***", ou
$B \supset A$ que se lê "***B* contém *A***".

Para indicar que um conjunto A não está contido num conjunto B, utiliza-se o símbolo $\not\subset$.

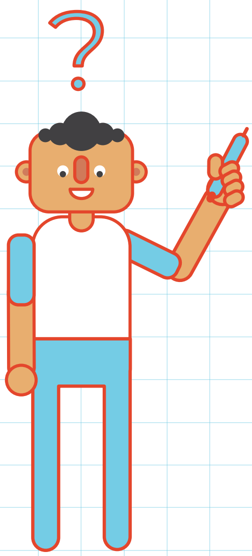


$A \subset B$

ATENÇÃO



- Todo o conjunto é subconjunto de si próprio ($A \subset A$). Porquê?
- O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto ($\emptyset \subset A$). Porquê?
- Para relacionar elementos com conjuntos, usam-se os símbolos $\in$ e $\notin$.
- Para relacionar conjuntos com conjuntos, usam-se os símbolos $\subset$, $\supset$, $\not\subset$ e $\not\supset$.



ATIVIDADES

1. Completa, utilizando os símbolos: $\in$, $\notin$, $=$, $\subset$, $\supset$, $\not\subset$, de modo a obteres afirmações verdadeiras.

1.1 4 ____ { números pares }.

1.2 9 ____ { números primos }.

1.3 $\{5, 6\}$ ____ $\{5, 6, 7, 8\}$.

1.4 $\mathbb{Z}$ ____ $\mathbb{N}$.

1.5 $\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ ____ $\mathbb{Z}$.

1.6 { a, e, i, o, u } ____ { vogais do alfabeto português }.

2. Considera os conjuntos:

$A = \{-1, 0, 1\}$,
$B = \{1, 2\}$ e
$C = \{0, 1\}$

Indica se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

2.1 $B \subset A$

2.2 $A \supset C$

2.3 $B = C$

2.4 $-1 \in B$

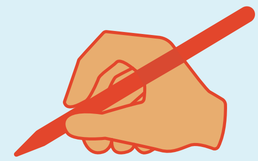
2.5 $2 \notin C$

2.6 $\emptyset \not\subset A$

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

REUNIÃO DE CONJUNTOS

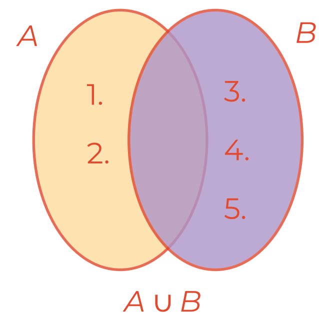
Dados dois conjuntos, A e B, chama-se **reunião** ou **união** desses conjuntos ao conjunto constituído pelos elementos que pertencem a A ou a B, e escreve-se $A \cup B$:



$$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ou } x \in B \}$$

Exemplos:

Dados os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ e $C = \{4, 5\}$



- $A \cup B = \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $B \cup C = \{3, 4, 5\} \cup \{4, 5\} = \{3, 4, 5\}$
- $A \cup \{\ \} = \{1, 2\} \cup \{\ \} = \{1, 2\} = A$

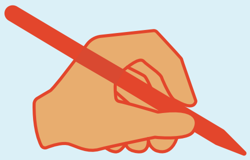
Representa, usando diagramas, os conjuntos B ∪ C e A ∪ { }.

PROPRIEDADES DA REUNIÃO

Considerando os conjuntos A, B e C num universo U, é possível verificar as seguintes propriedades da reunião de conjuntos:

Propriedades	Reunião
Comutativa	$A \cup B = B \cup A$
Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Existência do elemento neutro	$A \cup \emptyset = A$
Existência do elemento absorvente	$A \cup U = U$
Idempotência	$A \cup A = A$

INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS



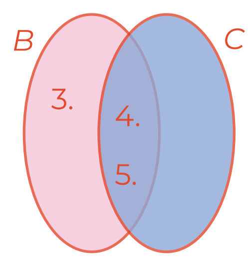
Dados dois conjuntos, A e B, **chama-se interseção** desses conjuntos ao conjunto constituído pelos elementos que pertencem simultaneamente a A e a B, e escreve-se $A \cap B$:

$$A \cap B = \{ x: x \in A \text{ e } x \in B \}$$

Exemplos:

1. Voltando aos conjuntos considerados anteriormente:

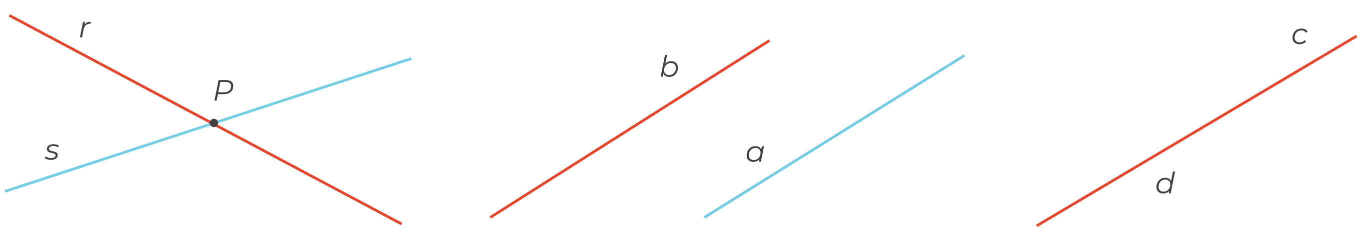
$A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ e $C = \{4, 5\}$



$B \cap C$

- $B \cap C = \{3, 4, 5\} \cap \{4, 5\} = \{4, 5\}$
- $A \cap C = \{1, 2\} \cap \{4, 5\} = \{\ \}$
- $B \cap \{\ \} = \{3, 4, 5\} \cap \{\ \} = \emptyset$

2. Considera as retas representadas no plano:



$r \cap s = \{P\}$ $a \cap b = \{\ \}$ $c \cap d = c = d$

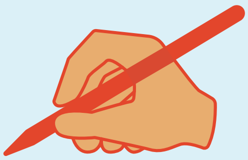
PROPRIEDADES DA INTERSEÇÃO

De igual modo, sendo os conjuntos A, B e C num universo U, é possível verificar as seguintes propriedades da interseção de conjuntos:

Propriedades	Interseção
Comutativa	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Existência do elemento neutro	$A \cap U = A$
Existência do elemento absorvente	$A \cap \emptyset = \emptyset$
Idempotência	$A \cap A = A$

CONJUNTOS DISJUNTOS

Dois conjuntos, A e B, dizem-se **disjuntos** se a sua interseção for igual ao conjunto vazio, isto é $A \cap B = \emptyset$.

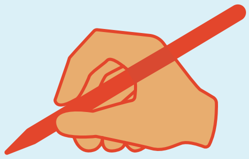


Exemplo:
$A = \{ 1, 2 \}$ e $C = \{ 4, 5 \}$ são **conjuntos disjuntos**, pois
$A \cap C = \{ 1, 2 \} \cap \{ 4, 5 \} = \{ \}$

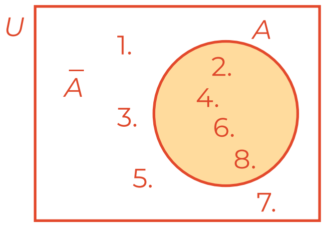
COMPLEMENTAÇÃO DE CONJUNTOS

Dado o conjunto A definido no universo U, chama-se **complementar** de A ao conjunto formado pelos elementos do universo que não pertencem a A. Representa-se por $\bar{A}$.

$\bar{A} = \{ x : x \in U \text{ e } x \notin A \}$



Exemplos:
No universo $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$, considera os conjuntos,
$A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$, $B = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ e $C = \{ 3, 4, 5 \}$



- $\bar{A} = \{ 1, 3, 5, 7 \}$
- $\bar{B} = \{ 2, 4, 6, 8 \}$
- $\bar{C} = \{ 1, 2, 6, 7, 8 \}$

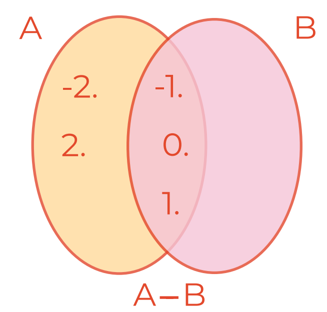
Aproveitando os mesmos conjuntos, verifica as seguintes **propriedades da complementação**:

- $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $A \cup \bar{A} = U$
- $\bar{\emptyset} = U$
- $\bar{U} = \emptyset$
- $\bar{\bar{A}} = A$

DIFERENÇA DE CONJUNTOS

Dados dois conjuntos, A e B, chama-se diferença entre A e B (complementar de A em relação a B) ao conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.

Simbolicamente, escreve-se: $A - B = \{ x \colon x \in A \text{ e } x \notin B \}$



Exemplo:

Sendo $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1\}$

- $A - B = \{-2, 2\}$
- $B - A = \{\ \}$

PROPRIEDADES MISTAS

Propriedades distributivas

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ propriedade distributiva da reunião em relação à interseção
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ propriedade distributiva da interseção em relação à reunião

Complementar da reunião e da interseção

- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Verifica as propriedades acima, recorrendo a diagramas de Venn, considerando os conjuntos A, B, C e o universo U, anteriormente definidos.

PROPRIEDADES DOS CARDINAIS DE CONJUNTOS

Sendo A e B dois conjuntos finitos então, verificam-se as seguintes propriedades:

- $\#(A - B) = \#A - \#(A \cap B)$
- $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

No caso de A e B serem conjuntos disjuntos, então:

- $\#(A \cup B) = \#A + \#B$

Recorrendo a diagramas de Venn, verifica essas propriedades, considerando os conjuntos:

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1\}$

ATIVIDADES DE CONSOLIDAÇÃO

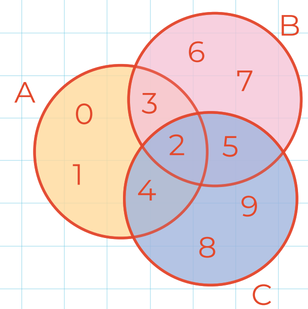
1. Considera o universo, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e nele definidos os conjuntos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ e $C = \{7, 8, 9\}$

Determina em extensão:

1.1 $\bar{A}$, $\bar{B}$ e $\bar{C}$ **1.2** $A \cup B$, $A \cup C$ e $B \cup C$ **1.3** $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$

1.4 $\overline{A \cup B}$ e $\overline{B \cap C}$ **1.5** $A - B$ e $B - C$

2. Observa os diagramas ao lado e completa:



2.1 $A = \cdots\cdots$ **2.2** $B = \cdots\cdots$

2.3 $C = \cdots\cdots$ **2.4** $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

3. Considera os conjuntos:
$A = \{x \in \mathbb{N} : x$ é ímpar menor que $9\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} : -3 \leq x < 4\}$

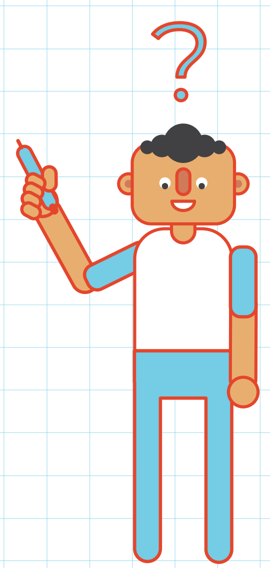
Representa cada um deles em extensão e indica o respetivo cardinal:

3.1 A e B **3.2** $A \cup B$ e $A \cap B$ **3.3** $A - B$ e $B - A$

4. Determina os conjuntos A, B e o universo U, sabendo que A e B são conjuntos definidos em U, tais que:
$A \cup B = \{1, 3, 8, 9\}$, $\bar{A} = \{4, 6, 9\}$ e $\bar{B} = \{3, 4, 6\}$

5. Dados os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{5, 7, 9\}$ e $C = \{1, 3, 9\}$, determina os elementos de um conjunto X, tal que:

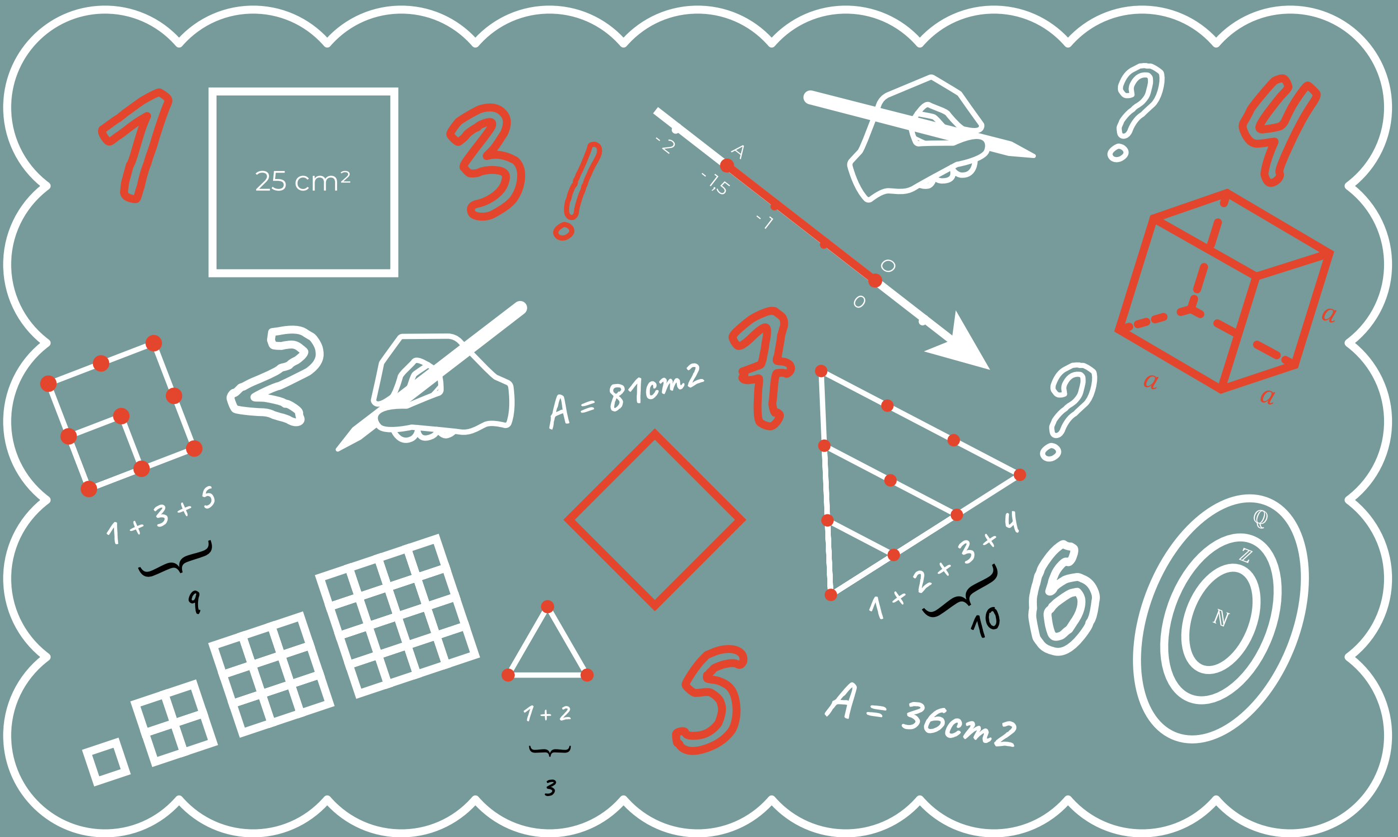
5.1 $A \cup X = A$ **5.2** $B \cup X = B$ **5.3** $C \cup X = A \cup B$

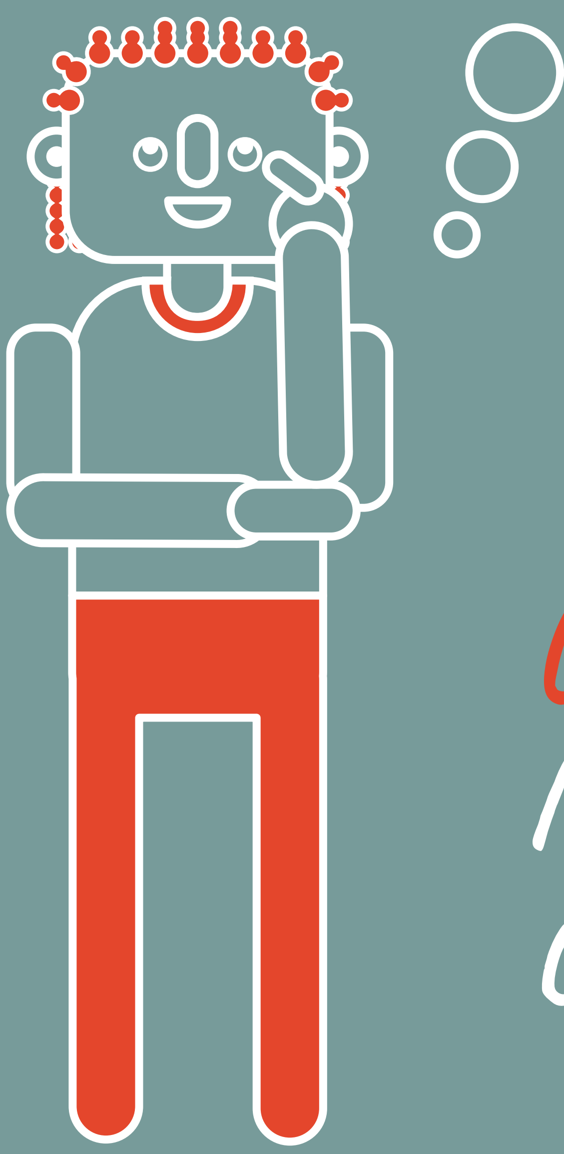


6. Um grupo de alunos vai participar numa campanha de sensibilização e proteção do ambiente, elaborando alguns cartazes com temas diferentes. Desses alunos, sabe-se que 18 escolheram o tema "Extração de areias nas praias", 14 o tema "Plantas endémicas" e 7 ambos os temas. Qual o total de alunos?

7. Numa turma de 30 alunos, 20 gostam de Matemática e 16 de História. O número de alunos desta turma que gostam de Matemática e de História é:

(A) 10 **(B)** No mínimo 6 **(C)** No máximo 6 **(D)** 18





UNIDADE 2

Números e Operações

UNIDADE 2

NÚMEROS E OPERAÇÕES

CONTEÚDOS:

- Sequências numéricas
- Conjunto dos números racionais
- Representação de números racionais num eixo
- Relação de ordem em $\mathbb{Q}$
- Módulo de um número racional
- Raiz quadrada de números racionais não negativos e raiz cúbica de números racionais
- Valor aproximado de um número racional
- Arredondamentos
- Conversão de dízimas finitas à forma fracionária
- Adição algébrica em $\mathbb{Q}$ e suas propriedades
- Simplificação da escrita
- Multiplicação em $\mathbb{Q}$ e suas propriedades
- Divisão em $\mathbb{Q}$
- Potenciação em $\mathbb{Q}$
- Expressões numéricas

OBJETIVOS:

- Identificar sequência de números.
- Representar números racionais na reta numérica.
- Comparar números racionais.
- Ordenar números racionais.
- Definir módulo, geométrica e algebricamente.
- Utilizar a noção de módulo nas operações com números.
- Aplicar e demonstrar as propriedades de módulo e números simétricos na simplificação de expressões.
- Calcular a raiz quadrada de quadrados perfeitos.
- Calcular raiz cúbica de cubos perfeitos.
- Relacionar potências e raízes.
- Determinar o valor aproximado de um número.
- Arredondar o resultado de problema, de acordo com o contexto.
- Estimar a resposta a problemas, envolvendo números racionais e usando arredondamentos.
- Operar com números escritos na forma fracionária, decimal e inteira.
- Usar valores aproximados de números racionais e escolher uma aproximação adequada ao contexto de cada situação.
- Simplificar expressões utilizando as propriedades das operações em $\mathbb{Q}$.
- Desembaraçar de parênteses.
- Realizar atividades de forma autónoma, responsável e criativa.

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

No nosso dia a dia deparamo-nos com várias sequências, por exemplo:

- Os dias de um mês: 1, 2, 3, 4, 5, ..., 30, 31
- A numeração dos alunos numa turma: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 25,...
- A numeração das casas numa rua.

Dado um conjunto *A*, uma sequência dos elementos de *A* é uma correspondência de *A* com o subconjunto de $\mathbb{N}$ que inicia em 1 e termina no número natural correspondente ao cardinal de *A*. O mesmo é dizer que uma sequência dos elementos de um conjunto *A* é uma ordenação dos elementos de *A* de modo a ter o primeiro, o segundo, o terceiro, o quarto, ...

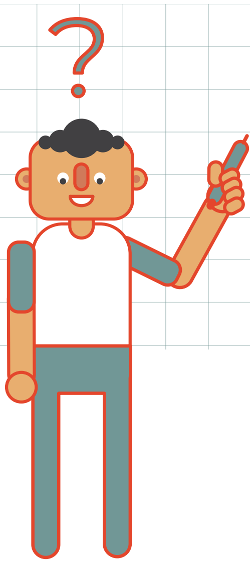
Exemplo:

A = { pera, laranja, uva, maçã, goiaba, azedinha }

Uma sequência dos elementos de *A* pode ser a seguinte:

1 ou 1º - goiaba
2 ou 2º - pera
3 ou 3º - uva
4 ou 4º - azedinha
5 ou 5º - laranja
6 ou 6º - maçã

Repara que a sequência terminou no 6º elemento, pois 6 é o cardinal de *A*. Os elementos de um conjunto podem ser sequenciados de várias formas diferentes, trocando a sua ordem.



ATIVIDADES:

1. Apresenta mais duas sequências diferentes dos elementos de *A*.

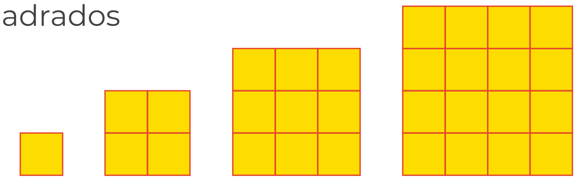
2. Quantas sequências diferentes tem um conjunto de 3 elementos? (usa, por exemplo, o conjunto *A* = { a, b, c }). E de 4 elementos? (usa, por exemplo, o conjunto *A* = { a, b, c, d })

Na matemática existem vários tipos de sequências, conforme a natureza dos seus elementos.

Exemplos:

- 2, 4, 6, 8, 10, ... , sequência dos números pares
- 1, 3, 5, 7, 9, ... , sequência dos números ímpares
- $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, sequência dos números inteiros maiores que -4
- $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$, sequência das potências de expoente natural de base $\frac{1}{2}$

- sequência geométrica de quadrados



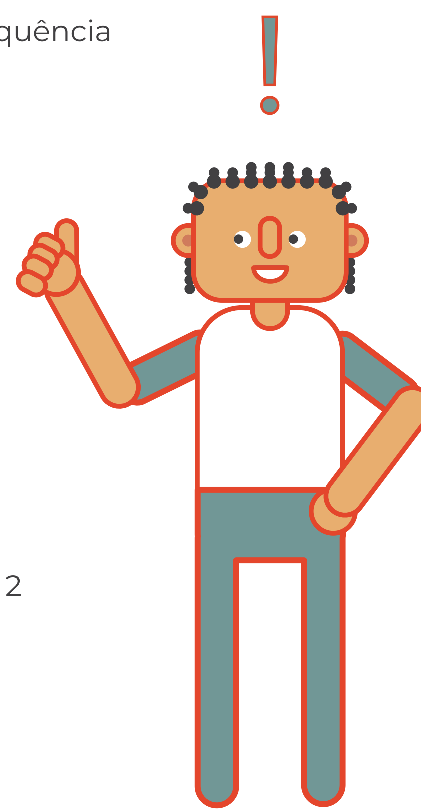
- Segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado, domingo - sequência dos dias da semana.

Numa sequência numérica, consideram-se:
Os **termos** da sequência, que são os números que a formam e a **ordem** de cada termo, que representa a posição em que se encontra o termo considerado.

Por exemplo, na sequência 3, 6, 9, 12, ... , tem-se que:
- o **primeiro termo** ou o termo de ordem 1 é 3, em que 3 = 3 x 1
- o **segundo termo** ou o termo de ordem 2 é 6, em que 6 = 3 x 2
- o **terceiro termo** ou o termo de ordem 3 é 9, em que 9 = 3 x 3
- o **quarto termo** ou termo de ordem 4 é 12, em que 12 = 3 x 4

Então, o termo de ordem n é dado por 3 x n ou $3n$ que também se designa por **termo geral** ou **regra de formação da sequência**.
A partir do termo geral pode-se calcular o termo de qualquer ordem da sequência.
Por exemplo, o décimo primeiro termo ou termo de ordem 11 da sequência $3n$ é : 3 x 11 = 33

Considera as sequências numéricas dadas por:
1, 3, 5, 7, ...
4, 6, 8, 10, ...
Indica o termo geral de cada uma delas.



Exemplo:
Considera a sequência cujo termo geral é $n^2 + 1$.
Determina os quatro primeiros termos.

Resolução:
O primeiro termo ou o termo de ordem 1, é dado por: $1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

O segundo termo: $2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

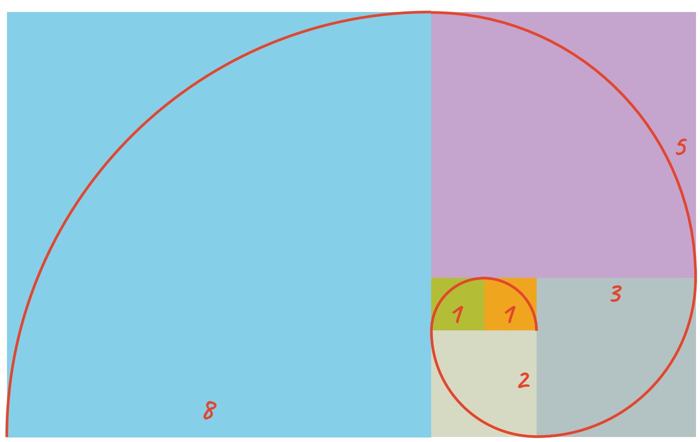
O terceiro termo: $3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$

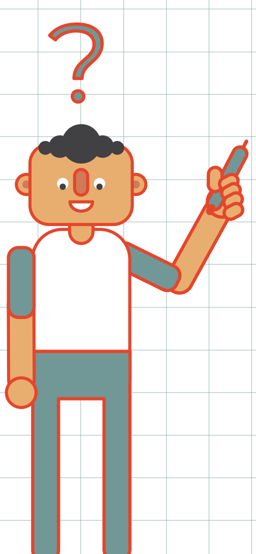
O quarto termo: $4^2 + 1 = 16 + 1 = 17$

Algumas sequências especiais

- **Números primos:** 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... (ainda não foi descoberta nenhuma regra de formação desta sequência).
- **Sequência de Fibonacci:** 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... (os dois primeiros termos são iguais a 1 e cada termo, a partir do segundo, obtém-se somando os dois termos anteriores).
- **Espiral de Fibonacci:**

Como se pode constatar na figura abaixo, os dois quadrados pequenos têm de comprimento 1 unidade. Para os outros quadrados, a medida do lado é obtida adicionando a medida dos lados dos quadrados anteriores. A partir desses quadrados, é possível traçar a espiral conhecida por **Espiral de Fibonacci**.





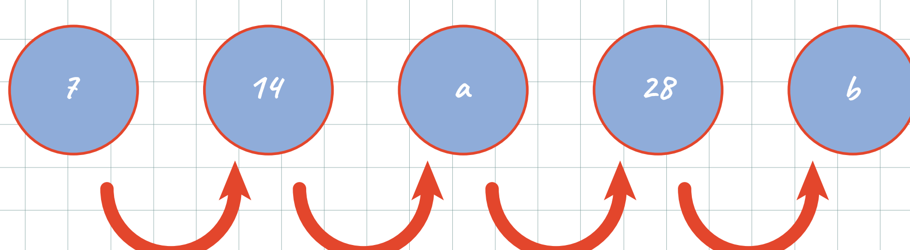
ATIVIDADES

1. Para cada uma das sequências abaixo, escreve os termos de ordem quatro e cinco:

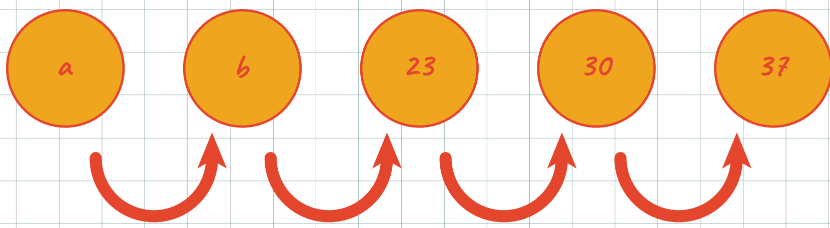
1.1 4, 8, 12, ... **1.2** 5, 9, 13,... **1.3** $\frac{2}{9}, \frac{3}{18}, \frac{4}{27}, \ldots$

2. Descobre os números correspondentes às letras:

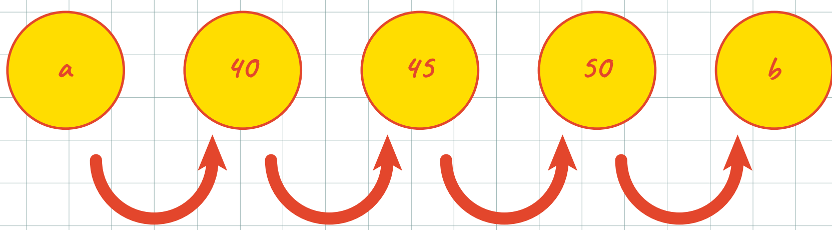
2.1



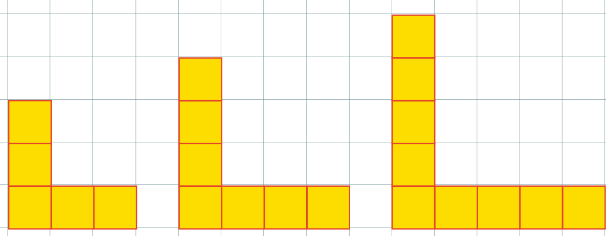
2.2



2.3



3. O Carlos fez as seguintes construções com quadrados:



Construção 1 Construção 2 Construção 3

3.1 Desenha o quarto elemento da sequência.
3.2 Quantos quadrados são necessários para formar a construção 5?
3.3 Completa a tabela:

Número da construção	1	2	3	4	5	...	...
Número de quadrados	5	7	9	...	...	...	21

3.4 Existirá alguma construção com 70 quadrados? Justifica.

4. Considera uma sequência em que o primeiro termo é 4 cuja lei (ou regra) de formação de cada um dos termos a seguir ao primeiro é:
"adicionar duas unidades ao termo anterior".
Qual é o terceiro termo da sequência?

5. Determina os cinco primeiros termos da sequência de termo geral:

5.1 $4 \times n - 1$

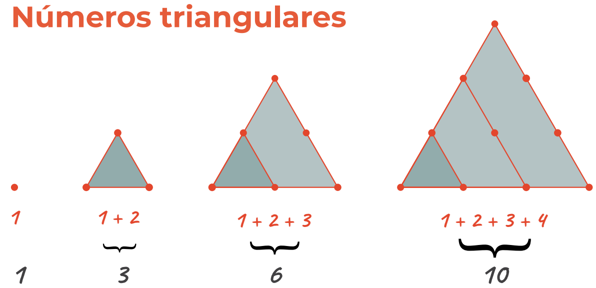
5.2 $2 \times n + 1$

CURIOSIDADES

Números poligonais

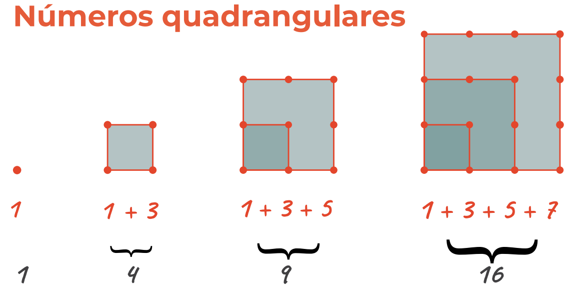
Alguns números podem ser representados por pontos sobre um polígono regular, como nos exemplos abaixo. Esses números chamam-se **números poligonais**. De entre eles podemos destacar os números triangulares, quadrangulares, pentagonais e hexagonais.

Números triangulares



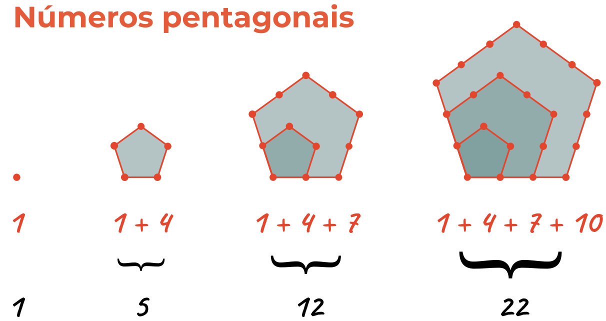
Podes verificar que o termo geral da sequência é: $\frac{n \times (n+1)}{2}$

Números quadrangulares



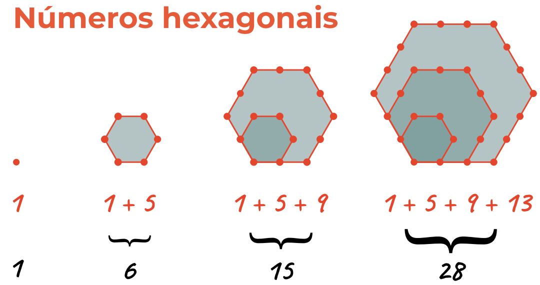
Podes verificar que o termo geral da sequência é: n^2

Números pentagonais



Podes verificar que o termo geral da sequência é: $\frac{3 \times n^2 - n}{2}$

Números hexagonais



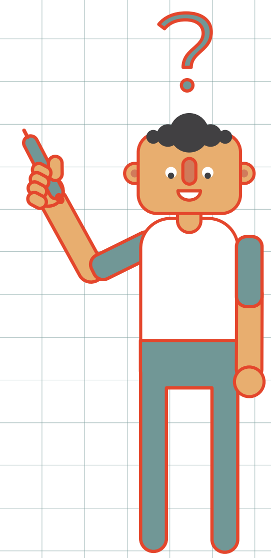
Podes verificar que o termo geral da sequência é: $2n^2 - n$

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

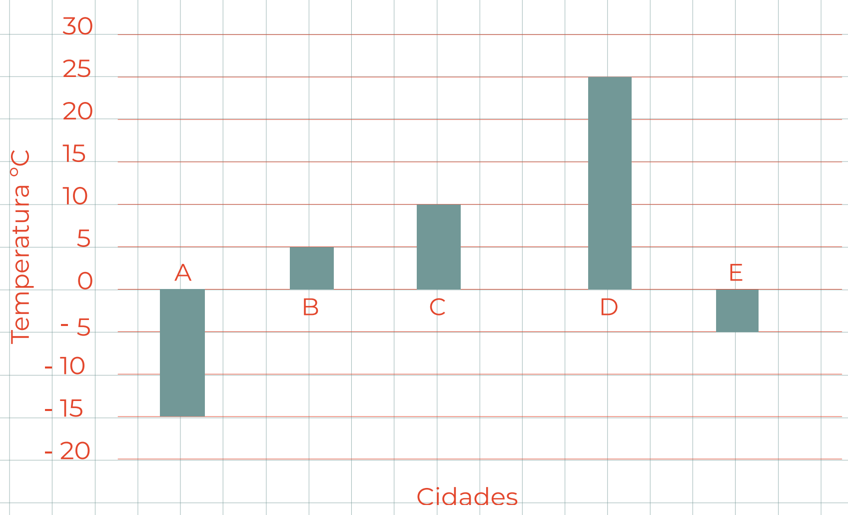
Nos anos anteriores, estudamos o conjunto dos números inteiros relativos, que designamos por $\mathbb{Z}$, formado pelos números inteiros negativos, o zero e os números inteiros positivos, cuja representação em extensão é dada por:

$$\mathbb{Z} = \{\ \dots,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ \dots\ \}$$

ATIVIDADES DE REVISÃO



1. Observa o gráfico onde estão registadas as temperaturas (em °C) de cinco cidades, num dado período do dia.



1.1 Qual é a cidade que registou menor temperatura?
1.2 Qual é a cidade que registou maior temperatura?
1.3 Calcula a diferença entre as temperaturas registadas nas cidades *C* e *D*, *A* e *E*, *A* e *B*.

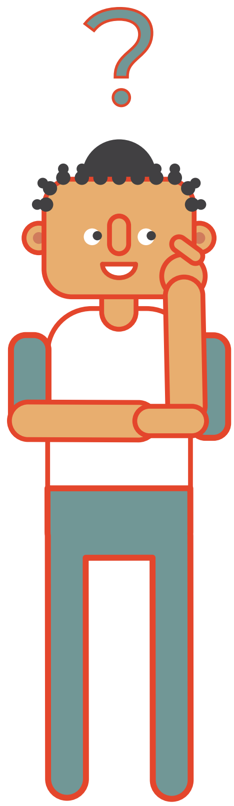
2. Considera o conjunto $A = \{-2, +4, -5, 1, -4\}$
2.1 Representa na reta numérica os pontos cujas abcissas são os elementos do conjunto *A*.

2.2 Utilizando letras, indica dois pontos equidistantes da origem.

2.3 Escreve os elementos do conjunto *A* por ordem decrescente.

3. Efetua e simplifica o resultado:

3.1 $2 + (3 - 5 - 7 + 2)$
3.2 $-(9 + 24 + 8) - (8 - 9)$
3.3 $-2 \times (-5 + 2)$
3.4 $32 \div (4 - 8)$
3.5 $(-6)^5 \times (-6)^4 \div (-6)^7$
3.6 $(4^2)^3 \times 4^7 \div 4^{13}$



O conjunto $\mathbb{Q}$

No nosso dia a dia, deparamos com situações como as exemplificadas abaixo, que não podem ser descritas através de números inteiros:

- "A Carla não foi à escola ontem porque estava com 39,5°C de febre".

39,5 é um número que já conheces e que representa um número decimal.

- "Uma costureira comprou 3,25 *m* de tecido para fazer um vestido".

3,25 é também um número decimal.

- "Uma equipa de mergulhadores efetuou um mergulho a uma profundidade de 0,3 *km*".

A profundidade de 0,3 *km* deve representar-se por - 0,3 : é então, também, um número decimal, mas negativo.

- "A Vera comprou $\frac{3}{4}$ *l* de azeite", $\frac{3}{4}$ é um número fracionário.

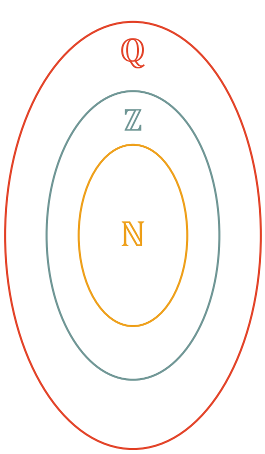
Os números utilizados acima são racionais, representados na forma decimal, como é o caso de 39,5 ; 3,25 e – 0,3 ou na forma fracionária, como é o caso de $\frac{3}{4}$. Todos podem ser escritos na forma decimal, e na forma fracionária, como se pode verificar:

- $\frac{3}{4} = 0{,}75$
- $-0{,}3 = -\frac{3}{10}$
- $3{,}25 = \frac{325}{100} = \frac{13}{4}$
- $39{,}5 = \frac{395}{10} = \frac{79}{2}$

Como sabes, os números inteiros também podem ser escritos na forma fracionária.

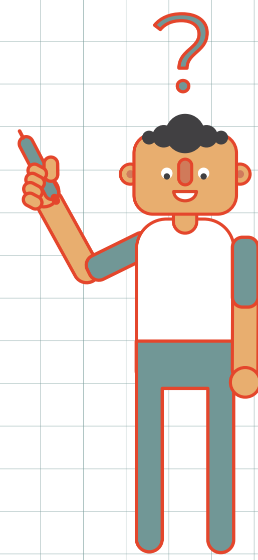
Exemplos:

- $5 = \frac{10}{2}$
- $-7 = -\frac{21}{3}$



O conjunto dos números racionais representa-se por $\mathbb{Q}$.
Observa, na figura ao lado, que o conjunto $\mathbb{Q}$ contém o conjunto $\mathbb{Z}$ que, como sabes, contém o conjunto $\mathbb{N}$.
Para além dos subconjuntos de $\mathbb{Q}$ representados na figura, podemos destacar ainda outros subconjuntos:

- racionais positivos $\mathbb{Q}^+$;
- racionais não negativos $\mathbb{Q}_0^+$;
- racionais negativos $\mathbb{Q}^-$;
- racionais não positivos $\mathbb{Q}_0^-$;



ATIVIDADES

1. Indica:

1.1 Três elementos de cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^-$ e $\mathbb{Q}_0^+$

1.2 Um elemento de $\mathbb{Q}$ que não pertença a $\mathbb{N}$, mas pertença a $\mathbb{Z}$.

1.3 Um elemento de $\mathbb{Q}$ que não pertença a $\mathbb{Z}$.

2. Classifica, como verdadeira ou falsa, cada uma das seguintes afirmações:

2.1 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ **2.2** $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ **2.3** $\mathbb{Q}^- \cap \mathbb{Q}_0^+ = \varnothing$

3. Completa com um dos símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$ e $\supset$, de modo a obteres afirmações verdadeiras:

3.1 $\frac{1}{5}$ ...... $\mathbb{Z}$ **3.2** $-0{,}5$ ...... $\mathbb{Q}$ **3.3** $\frac{4}{3} \times \frac{3}{2}$ ...... $\mathbb{N}$

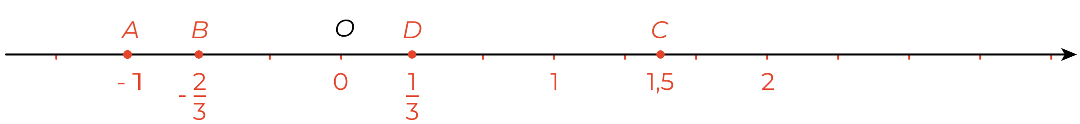
3.4 $\left\{-\frac{3}{5}, 2\right\}$ ...... $\mathbb{Q}$ **3.5** $\mathbb{Q}$ ...... $\mathbb{N}$ **3.6** $\mathbb{Z}_0^+$ ...... $\mathbb{Q}$

4. Considera o conjunto $A = \left\{ 6; -7; \frac{3}{8}; -0{,}2; 0 \right\}$

Representa em extensão o conjunto *B*, dos números simétricos dos elementos de *A*.

Representação de números racionais num eixo

Já aprendeste a representar abcissas de números inteiros e racionais positivos num eixo ou reta orientada. Para representar um número racional negativo, procedemos do mesmo modo.
Exemplo:
Observa a reta orientada:

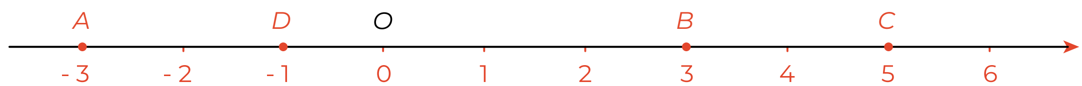


Ao ponto A corresponde o número -1, ou seja -1, é abcissa do ponto A.

$A \rightarrow -1$ $B \rightarrow -\frac{2}{3}$ $C \rightarrow 1{,}5$ $D \rightarrow \frac{1}{3}$

Valor absoluto de um número racional

Na reta orientada abaixo estão representados alguns pontos.
Como podes verificar, a distância dos pontos *A* e *B* à origem (*O*) é igual.
Dizemos que -3 e 3 têm o mesmo valor absoluto.



O valor absoluto ou **módulo** de um número racional **a** é a medida da distância à origem do ponto que o representa na reta numérica.
O valor absoluto de **a** representa-se por | **a** |.

Exemplo:

- $|-1{,}5| = 1{,}5$ como se pode ver na reta.

- $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$
- $\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$
- $|+1{,}5| = 1{,}5$
- $|-4{,}3| = 4{,}3$
- $|-3| = 3$
- $|\,5\,| = 5$

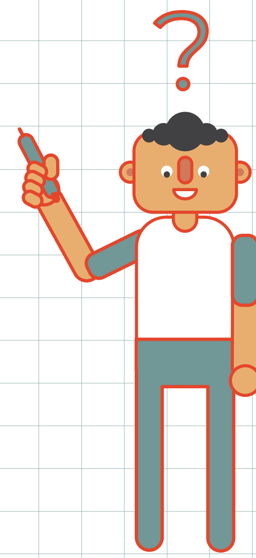
Números simétricos

Dois números racionais são simétricos se são abcissas de pontos equidistantes da origem.

Assim, -2 é **simétrico** de 2, $-\frac{1}{3}$ é simétrico de $\frac{1}{3}$.

Repara que **os valores absolutos de números racionais simétricos são iguais**.

ATIVIDADES



1. Indica o valor lógico (verdadeiro ou falso) das igualdades:

1.1 $\left|-\frac{1}{2}\right| = \left|+\frac{1}{2}\right|$

1.2 $\left|-\frac{24}{8}\right| = |-3|$

1.3 $\left|-\frac{7}{3}\right| = -\frac{7}{3}$

1.4 $\left|\frac{10}{9}\right| = \frac{10}{9}$

1.5 $|+1{,}2| = \left|+\frac{6}{5}\right|$

1.6 $|-0{,}4| = \left|-\frac{6}{15}\right|$

2. Considera o conjunto

$$A = \left\{0{,}4; -\frac{3}{2}; \frac{20}{4}; -\frac{6}{4}; -\frac{7}{7}; \frac{0}{5}; +\frac{2}{3}; -\frac{3}{1}; -\frac{2}{5}\right\}$$

2.1 Indica os elementos de *A* que são números inteiros relativos.

2.2 Indica dois elementos de *A* que são simétricos.

2.3 Marca, numa reta orientada, os pontos correspondentes aos elementos de *A*.

3. Considera a seguinte reta orientada.

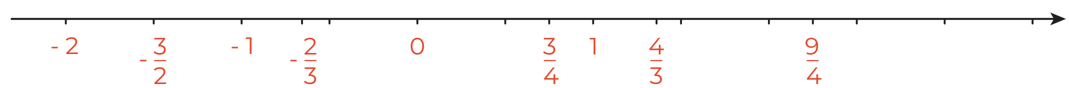
3.1 Indica os números racionais correspondentes aos pontos *A*, *B*, *C* e *D*.

3.2 Indica os números simétricos daqueles que obtiveste em 3.1; marca-os na reta orientada dada, representando-os, respetivamente, por *M*, *N*, *P* e *Q*.

RELAÇÃO DE ORDEM EM $\mathbb{Q}$

Existe uma relação de ordem entre os números racionais.
A sua representação numa reta orientada permite estabelecer, facilmente, essa relação de ordem.

Observa a reta orientada seguinte:



Nela, como vês, estão representados alguns números racionais.

Os números “crescem” da esquerda para a direita. Um número é tanto maior quanto mais à direita se encontrar.

Se ordenarmos os números por ordem crescente, temos:

$$-2 < -\frac{3}{2} < -1 < -\frac{2}{3} < 0 < \frac{3}{4} < 1 < \frac{4}{3} < \frac{9}{4}$$

Para ordenar os elementos de um subconjunto de $\mathbb{Q}$ temos outras formas de o fazer.

No conjunto $\mathbb{Q}$, tal como em $\mathbb{Z}$**,** temos:

- ***O zero é maior que qualquer número racional negativo e menor que qualquer número racional positivo.***

  Exemplo: $0 > -3{,}1$ e $0 < \frac{5}{3}$

- ***Qualquer número racional negativo é menor do que qualquer número racional positivo.***

  Exemplo: $-5 < \frac{1}{2}$

- ***De dois números positivos é maior o que tiver maior valor absoluto.***

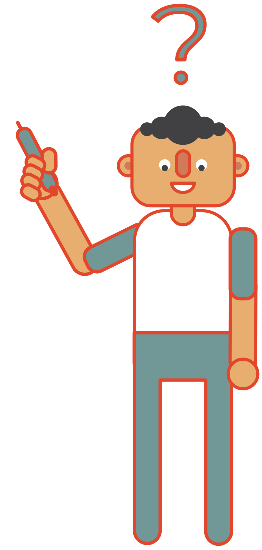
  Exemplo: $\frac{3}{2} > \frac{3}{4}$

- ***De dois números negativos é maior o que tiver menor valor absoluto.***

  Exemplo: $-2 > -4{,}3$

Exemplos:

Compara os pares de números seguintes, utilizando os sinais < ou > :



1. 3 e $\frac{7}{2}$ **2.** $+\frac{1}{2}$ e -2 **3.** $-\frac{4}{3}$ e $-\frac{5}{4}$

Resolução:

1. Como $\frac{7}{2} = 3{,}5$ e sabemos que $\left|\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2}$ e $|\,3\,| = 3$, podemos escrever que $3 < \frac{7}{2}$ visto que $|\,3\,| < \left|\frac{7}{2}\right|$

2. Tendo em conta que qualquer número positivo é maior que qualquer número negativo, conclui-se que $+\frac{1}{2} > -2$

3. Reduzindo as duas frações ao mesmo denominador temos:

$-\frac{4}{3} = -\frac{16}{12}$; $-\frac{5}{4} = -\frac{15}{12}$ e sabendo que $\left|-\frac{16}{12}\right| = \frac{16}{12}$; $\left|-\frac{15}{12}\right| = \frac{15}{12}$,

podemos concluir que $\frac{15}{12} < \frac{16}{12}$, logo $-\frac{4}{3} < -\frac{5}{4}$ porque $\left|-\frac{5}{4}\right| < \left|-\frac{4}{3}\right|$

ATIVIDADES

1. Completa com um dos sinais < , > ou = :

1.1 $\frac{2}{3}$ ____ $\frac{5}{4}$ **1.2** $-\frac{4}{5}$ ____ $-\frac{5}{4}$ **1.3** $-\frac{1}{6}$ ____ $\frac{1}{2}$ **1.4** $-\frac{39}{3}$ ____ -13

1.5 $3{,}8$ ____ $3{,}9$ **1.6** $2{,}1$ ____ $\frac{9}{5}$ **1.7** $\left|-\frac{1}{2}\right|$ ____ $\left|-\frac{3}{2}\right|$ **1.8** $\left|-\frac{5}{2}\right|$ ____ $\frac{1}{2}$

2. Considera o conjunto $A = \left\{-\frac{8}{7}, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{2}\right\}$

2.1 Indica o maior e o menor elemento do conjunto A.

2.2 Entre que números inteiros está $-\frac{7}{2}$?

2.3 Indica o maior número inteiro não superior a $-\frac{5}{3}$.

2.4 Indica os números inteiros compreendidos entre $-\frac{7}{2}$ e $-\frac{5}{3}$.

3. Dispõe por ordem crescente os seguintes números:

$-2{,}4$; $-\frac{7}{4}$; $+\frac{9}{5}$; $1{,}9$; $-0{,}7$; -3

RAIZ QUADRADA DE NÚMEROS RACIONAIS NÃO NEGATIVOS

Em várias situações, foste confrontado com problemas em que era necessário calcular a área de um quadrado.

Considera o problema seguinte:

- Qual é a medida do lado de um quadrado cuja área mede 25 cm^2?

Como sabes, para calcular a área de um quadrado, elevamos ao quadrado a medida do comprimento do lado. Para resolver o problema anterior, terás agora de procurar um número que, elevado ao quadrado, seja 25: Certamente encontrarás o número 5.

E se, no problema, a área do quadrado fosse 36 cm^2? E se fosse 49 cm^2? Também não terás dificuldade em responder, pois as medidas dos comprimentos dos lados seriam, respetivamente 6 *cm* e 7 *cm*.

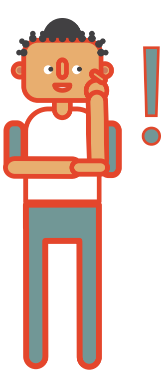
Então ao procurares os números 5, 6 e 7 estiveste a efetuar uma operação a que se dá o nome de **radiciação** e, neste caso, o resultado chama-se **raiz quadrada**, isto é, o número 5 é raiz quadrada de 25, 6 é raiz quadrada de 36 e 7 é raiz quadrada de 49.

Raiz quadrada de um número não negativo é um número que, elevado ao quadrado, produz o primeiro.

Simbolicamente, a operação de radiciação representa-se por « $\sqrt{\ }$ » e escrevemos: $5 = \sqrt{25}$ (5 é a raiz quadrada de 25), porque $5^2 = 25$.

Ao sinal $\sqrt{\ }$ chama-se **radical**, ao número 25 chama-se **radicando** e ao número 2 (que é omitido no caso da raiz quadrada) chama-se **índice do radical**.

Exemplos



- $\sqrt{0} = 0$ porque $0^2 = 0$
- $\sqrt{0,16} = 0,4$ porque $(0,4)^2 = 0,4 \times 0,4 = 0,16$
- $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ porque $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Para calcular a medida do comprimento do lado de um quadrado, conhecida a sua área, calcula-se a raiz quadrada do valor dessa área.

Por exemplo, a medida do comprimento do lado de um quadrado, cuja área é igual a 16 cm^2, é 4 *cm* pois, $\sqrt{16} = 4$.

Se a área do quadrado for igual a 20 cm^2 , será que existe um número inteiro que represente a medida do lado desse quadrado?

A resposta é obviamente não, pois não encontras nenhum **número inteiro** que elevado ao quadrado seja 20. De facto, $4^2 = 16$ e $5^2 = 25$, como podes verificar na tabela de quadrados seguinte:

n	1	2	3	4	5	6	7
n^2	1	4	9	16	25	36	49

Assim, $\sqrt{20}$ não é um número inteiro, mas sim um número compreendido entre 4 e 5, pois $16 < 20 < 25$. Escreveremos, então: $4 < \sqrt{20} < 5$

Os números 4 e 5 são os valores aproximados de $\sqrt{20}$. Como $4 < \sqrt{20}$, então 4 é um **valor aproximado de $\sqrt{20}$, por defeito, a menos de uma unidade**, e porque $5 > \sqrt{20}$, 5 é um **valor aproximado de $\sqrt{20}$, por excesso, a menos de uma unidade**.
Recorrendo a uma calculadora, podemos verificar que
$\sqrt{20} = 4{,}472135955...$, que é uma dízima infinita não periódica.
Como vês, nem sempre a raiz quadrada de um número é um número inteiro.

Chama-se **quadrado perfeito** a um número inteiro cuja raiz quadrada é um número inteiro.

É fácil construir uma tabela de quadrados perfeitos: basta elevar os números inteiros ao quadrado. Na tabela abaixo são indicados quadrados de números naturais (números inteiros positivos):

Quadrados perfeitos (a)	1	4	9	16	25	36	49	64	...
Raiz quadrada ($\sqrt{a}$)	1	2	3	4	5	6	7	8	...

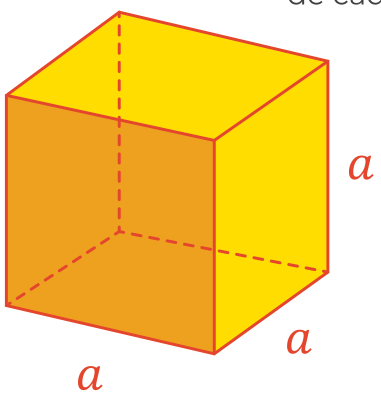
Neste ponto, somos levados a fazer duas observações importantes:
1 . Números racionais simétricos têm quadrados iguais: por exemplo, $3^2 = (-3)^2 = 9$ (Porquê?). Por isso, 3 é raiz quadrada de 9, mas (-3) também é raiz quadrada de 9. O mesmo se passa em relação a todos os números racionais simétricos.

2. Não tem sentido falar da raiz quadrada de um número racional negativo pois, se existisse, significaria que existia um número racional tal que o seu quadrado seria negativo. Ora, isso é absurdo pois o quadrado de qualquer número racional negativo é um número racional positivo (porquê?).

RAIZ CÚBICA DE NÚMEROS RACIONAIS

Para construirmos um cubo cujo volume é 8 cm^3, como determinar a medida do comprimento das arestas?

Como sabes, o volume de um cubo em que a medida do comprimento de cada aresta é igual a a é dado por $V = a \times a \times a = a^3$



Assim, para calcular a medida do comprimento da aresta do cubo, terás de procurar um número que elevado ao cubo seja igual a 8.

A resposta evidente é 2

.

Dizemos então que 2 é a raiz cúbica de 8 e escrevemos:
$\sqrt[3]{8} = 2$, porque $2^3 = 8$

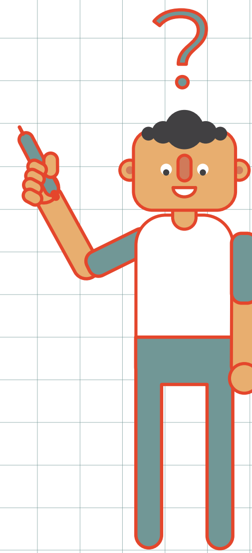
Raiz cúbica de um número, é um número que, elevado ao cubo, produz o primeiro.

Nota que, na representação da raiz cúbica, o índice 3 do radical, não é omitido.

Exemplos

- $\sqrt[3]{27} = 3$, porque $3^3 = 27$
- $\sqrt[3]{-27} = -3$, porque $(-3)^3 = -27$
- $\sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$, porque $(0{,}5)^3 = 0{,}125$
- $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$, porque $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
- $\sqrt[3]{-64} = -4$, porque $(-4)^3 = -64$

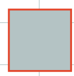
ATIVIDADES

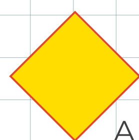


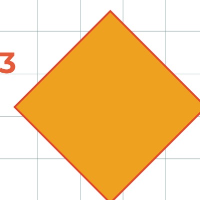
1. Calcula:

1.1 a raiz quadrada de 9;
1.2 a raiz cúbica de 64;
1.3 o dobro da raiz quadrada de 16;
1.4 a diferença entre a raiz quadrada de 4 e a raiz cúbica de 1.

2. Determina o comprimento dos lados de cada um dos quadrados:

2.1  $A = 16cm^2$

2.2  $A = 36cm^2$

2.3  $A = 81m^2$

3. Calcula o valor das seguintes expressões numéricas:

3.1 $\dfrac{\sqrt{9} \times \sqrt{25}}{\sqrt{4} \times \sqrt{16}}$ **3.2** $2 \times \sqrt{36} - 4 \times \sqrt[3]{27}$

3.3 $\sqrt{9} \times \sqrt{16} + \sqrt[3]{64}$ **3.4** $3 \times \sqrt[3]{10 + \sqrt{225}} + \sqrt{81}$

4. Determina a raiz quadrada de cada um dos números:

4.1 144 **4.2** 1,44 **4.3** 0,0144 **4.4** 14400

4.5 $\dfrac{1}{4}$ **4.6** $\dfrac{9}{25}$ **4.7** $\dfrac{1}{100}$

5. Qual é o número inteiro cujo cubo está compreendido entre 60 e 70?

6. Determina o comprimento da aresta de um cubo, sabendo que o seu volume é:

6.1 $8\ m^3$ **6.2** $27\ dm^3$ **6.3** $729\ cm^3$

7. Sendo *a* e *b* dois números não negativos, pode-se verificar que:

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ sendo $b > 0$

Calcula e verifica as propriedades anteriores:

7.1 $\sqrt{4 \times 25}$ **7.2** $\sqrt{4} \times \sqrt{25}$ **7.3** $\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}$ **7.4** $\sqrt{\dfrac{81}{9}}$

VALOR APROXIMADO DE UM NÚMERO RACIONAL

Dízimas

Recorda que para transformar uma fração em dízima divide-se o numerador pelo denominador.

Exemplo:

$\frac{3}{4} = 0{,}75$ porque

$$\begin{array}{r|l} 3{,}00 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}75 \\ 0 & \end{array}$$

$\frac{10}{3} = 3{,}333...$ porque

$$\begin{array}{r|l} 10{,}00 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 3{,}33... \\ 10 & \\ 1 & \end{array}$$

$\frac{1}{6} = 1{,}666...$ porque

$$\begin{array}{r|l} 1{,}000 & 6 \\ \cline{2-2} 40 & 0{,}166... \\ 40 & \\ 4 & \end{array}$$

$\frac{2}{11} = 0{,}1818...$ porque

$$\begin{array}{r|l} 2{,}0000 & 11 \\ \cline{2-2} 90 & 0{,}1818... \\ 20 & \\ 90 & \\ 2 & \end{array}$$

0,75 é uma **dízima finita** e 3,333 ... , 0,1666 ... e 0,1818 ... são **dízimas infinitas periódicas**, em que o(s) algarismo(s) que se repete(m) designa(m)-se por **período** da dízima.

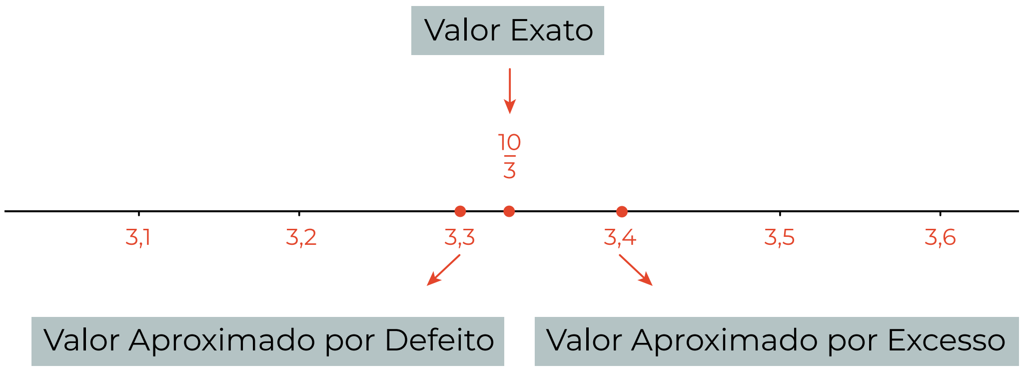
Recorda que os números racionais podem ser representados por uma dízima finita ou uma dízima infinita periódica.

Valor aproximado

Como tens verificado, na matemática, utilizam-se, muitas vezes, valores aproximados para determinados números, como por exemplo no cálculo da área do círculo em que tivemos a necessidade de utilizar o valor aproximado de ($\pi = 3{,}1415926536...$) e também quando transformamos um número fracionário num número decimal.

De acordo com os exemplos anteriores, verificamos que a fração $\frac{10}{3} = 3,(3)$ Assim,

- 3,3 é valor aproximado de 3,(3) por defeito a menos de uma décima;
- 3,4 é valor aproximado de 3,(3) por excesso a menos de uma décima.



Quando utilizamos um valor aproximado para um determinado número, cometemos um erro.
À diferença, em módulo, entre o valor exato e o valor aproximado chama-se **erro absoluto**.

erro absoluto = | valor exato – valor aproximado |

Considerando 3,3 um valor aproximado de $\frac{10}{3}$, então o erro absoluto é:

$$\left|\frac{10}{3} - 3{,}3\right| = \left|\frac{10}{3} - \frac{33}{10}\right| = \left|\frac{100}{30} - \frac{99}{30}\right| = \left|\frac{1}{30}\right| = \frac{1}{30}$$

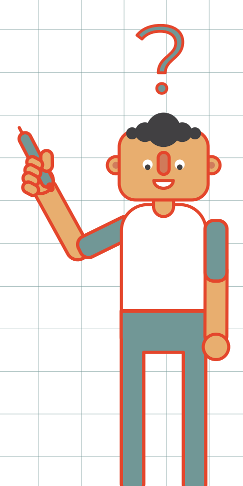
Do mesmo modo, podemos calcular os valores aproximados de 3,(3) à **unidade, centésimas** e **milésimas**.

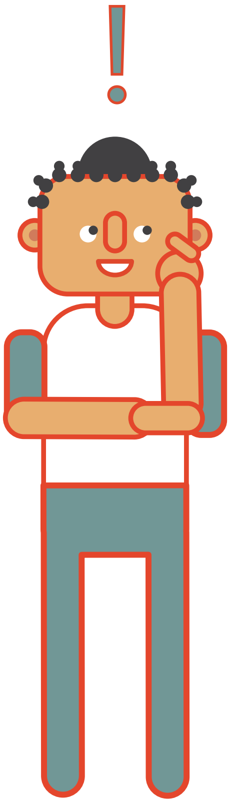
ATIVIDADES

Determina um valor aproximado por defeito e por excesso, à unidade, às décimas e às centésimas, dos seguintes números:

1. $\frac{2}{7}$ **2.** $\frac{11}{9}$

3. $\sqrt{5}$ **4.** $\sqrt{13}$





Arredondamentos

Na resolução dos problemas do dia a dia, temos necessidade de fazer arredondamentos. O tipo de arredondamento a fazer depende acima de tudo do problema em questão.

Exemplo:
O senhor Pedro precisa de 5,3 metros de rede para fazer uma vedação, mas na loja só vendiam um número inteiro de metros. Se ele comprar 5 metros, ele não consegue fechar a vedação. Então ele tem de comprar 6 metros de rede.
Neste caso, dizemos que foi feito um arredondamento, por excesso, às unidades, isto é, com erro absoluto inferior a uma unidade.

Consideremos os números 7,216 e 2,334.

Ambos têm três casas decimais. Para os arredondar às centésimas atendemos ao seguinte:

- no primeiro caso, a terceira casa decimal é maior do que 5, então aumenta-se uma unidade à segunda casa decimal;
- no segundo caso, a terceira casa decimal é menor do que 5, então mantem-se inalterada a segunda casa decimal.

7,216 ⟶ 7,22 2,334 ⟶ 2,33

Exemplos:
23,147 ⟶ 23,15 (arredondamento às centésimas)
35,234 ⟶ 35,23 (arredondamento às centésimas)
9,255 ⟶ 9,3 (arredondamento às décimas)
0,00025 ⟶ 0,000 (arredondamento às milésimas)
10,3452 ⟶ 10 (arredondamento às unidades)

Em algumas situações, opta-se por fazer aproximações, eliminando todos os algarismos à direita de uma determinada casa decimal. Este processo de aproximação de um número designa-se por **truncatura**.

Exemplo:
$\frac{2}{3} = 0,6666...$

Pode-se escrever $\frac{2}{3} \cong 0,66$ que se lê “ aproximadamente igual a”. Sendo 0,66 um valor aproximado por defeito de $\frac{2}{3}$, às centésimas.
Observa que a truncatura produz sempre um valor aproximado por defeito.

É importante notares que no cálculo de uma expressão numérica os arredondamentos ou truncaturas devem ser feitos no final.

Exemplo:
Calcula o valor aproximado da expressão numérica, utilizando arredondamentos às unidades:
5,4 + 2,3

1° utilizando os arredondamentos às unidades de cada uma das parcelas;
2° calculando o valor da expressão e efetuar o arredondamento no final.

Resolução:
1° 5,4 + 2,3 tomando 5 e 2 como valores aproximados de cada uma das parcelas, vem: 5 + 2 = 7

2° 5,4 + 2,3 = 7,7 $\longrightarrow$ 8

Que concluis?

ATIVIDADES

Calcula o valor das expressões, utilizando os arredondamentos às décimas e às centésimas:

1. 52,018 + 0,9885
2. 2,641 x 7,358

CONVERSÃO DE DÍZIMAS FINITAS À FORMA FRACIONÁRIA

Qualquer dízima finita ou infinita periódica pode ser transformada numa fração irredutível.

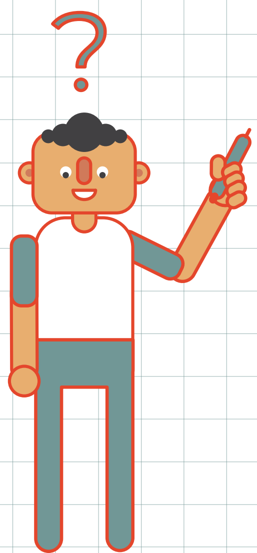
Dízima finita

Exprime na forma de fração irredutível as dízimas: 0,6 e 2,25

Resolução:

Tendo em conta o estudo das frações decimais, podemos escrever:

- $0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
- $2{,}25 = \frac{225}{100} = \frac{9}{4}$



ATIVIDADES

1. Determina as dízimas que representam os seguintes números racionais e classifica-as, indicando o respetivo período, no caso de serem periódicas:

1.1 $\frac{3}{5}$ **1.2** $\frac{17}{11}$ **1.3** $\frac{32}{33}$ **1.4** $\frac{37}{45}$

2. Determina o valor aproximado, por defeito a menos de 0,01 :

2.1 $\frac{2}{11}$ **2.2** $\frac{65}{33}$ **2.3** $\frac{2}{3}$ **2.4** $\frac{1}{7}$

3. Dados os números: 2,069; 0,2075; 16,824; 307,339; 61,022; 303,303.
Determina:
3.1 O valor aproximado, por truncatura, às centésimas, dos números dados.
3.2 O valor aproximado, por arredondamento a menos de uma centésima de cada um dos números.

4. Determina um valor aproximado às centésimas de $\frac{7}{3}+\frac{1}{2}$, fazendo o arredondamento.

5. Escreve sob a forma de fração as seguintes dízimas:
5.1 0,8 **5.2** 5,4 **5.3** 0,003

6. Utiliza a calculadora para determinar o valor aproximado dos seguintes números, com duas casas decimais:

6.1 $\sqrt{3}$ **6.2** $\sqrt{1{,}04}$ **6.3** $\sqrt{5}$

3

ADIÇÃO ALGÉBRICA EM $\mathbb{Q}$

ADIÇÃO EM $\mathbb{Q}$

No 5º Ano adquiriste conhecimentos que te permitem adicionar números inteiros relativos e números racionais na representação decimal ou fracionária, pois as regras da adição em $\mathbb{Q}$ são iguais às regras da adição em $\mathbb{Z}$.
Para adicionar dois números racionais com o mesmo sinal, adicionam-se os seus valores absolutos e mantém-se o sinal das parcelas.

Assim, por exemplo:
$(+7)+(+3)=+10$ $(+2{,}3)+(+4)=+6{,}3$ $(-5)+(-2)=-7$

Para adicionar dois números racionais com sinais contrários, subtraem-se os seus valores absolutos e atribui-se à soma o sinal da parcela com maior valor absoluto.

$(+5) + (-9) = -4$ $(-8{,}5) + (+13{,}2) = +4{,}7$

Certamente que te recordas ainda que podemos adicionar números na representação fracionária, quando estes têm ou não o mesmo denominador.

Para adicionar números racionais, mantêm-se também as regras de sinais enunciados para os números inteiros relativos.

Exemplos:

$$\left(+\frac{2}{5}\right) + \left(+\frac{4}{5}\right) = +\frac{6}{5}$$

$$\left(+\underset{(\times 2)}{\frac{1}{2}}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right) = \left(+\frac{2}{4}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right) = +\frac{5}{4}$$

$$(-0{,}1) + \left(-\frac{3}{10}\right) = \left(-\frac{1}{10}\right) + \left(-\frac{3}{10}\right) = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$$

$$(\underset{(\times 5)}{-2}) + \left(+\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{10}{5}\right) + \left(+\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{5}$$

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO EM $\mathbb{Q}$

Será que a adição em $\mathbb{Q}$ mantém as mesmas propriedades que a adição em $\mathbb{Z}$? Para responderes a esta questão, completa o quadro que se segue:

a	b	c	$a + b$	$b + a$	$(a + b) + c$	$a + (b + c)$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$				
$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$				
$\frac{2}{7}$	$-\frac{5}{6}$	2				
$-\frac{2}{3}$	-4	$-\frac{4}{5}$				
0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{7}$				
$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{4}$				
$-\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$+2{,}1$				
$-0{,}8$	$-3{,}2$	7				

Observando o quadro, depois de completado, verificamos que a adição em $\mathbb{Q}$ mantém as mesmas propriedades que a adição em $\mathbb{Z}$:

Comutativa

A ordem das parcelas não altera a soma:

$a + b = b + a$ com a e b $\in \mathbb{Q}$

Associativa

Na adição de três parcelas, obtém-se o mesmo resultado associando as duas primeiras ou as duas últimas:

$(a + b) + c = a + (b + c)$ com a, b e $c \in \mathbb{Q}$

Existência do elemento neutro

A soma de qualquer número com zero tem o valor da outra parcela:

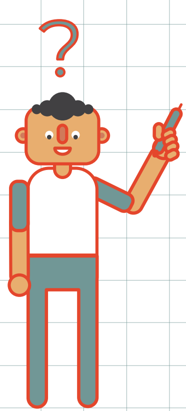
$a + 0 = 0 + a = a$ com $a \in \mathbb{Q}$

Existência do elemento simétrico

A soma de números simétricos é zero:

$a + (-a) = (-a) + a = 0$ com $a \in \mathbb{Q}$

ATIVIDADES



1. Calcula o valor de cada uma das seguintes somas:

1.1 $\left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)$ **1.2** $\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{7}{6}\right)$ **1.3** $(1{,}8) + \left(-\frac{4}{5}\right)$

1.4 $\left(+\frac{5}{3}\right) + (2{,}1)$ **1.5** $\left(+\frac{6}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(+\frac{1}{3}\right)$ **1.6** $\left(-\frac{1}{4}\right) + (+1) + \left(+\frac{1}{4}\right)$

2. Identifica as propriedades da adição em $\mathbb{Q}$, utilizadas nas igualdades seguintes:

2.1 $\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right) + (-5) = (-5)$ **2.2** $\left(-\frac{7}{2}\right) + 0 = \left(-\frac{7}{2}\right)$

2.3 $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{2}{9}\right) + \left(+\frac{1}{3}\right) = \left(+\frac{2}{9}\right)$

3. Utiliza as propriedades da adição em $\mathbb{Q}$ para calcular o valor de cada uma das seguintes somas:

3.1 $(-18) + (+87) + (+11) + (+7)$ **3.2** $(+6{,}7) + (+25{,}2) + (-6{,}7)$

3.3 $\left(+\frac{7}{4}\right) + (-1) + \left(-\frac{3}{4}\right)$ **3.4** $\left(-\frac{11}{12}\right) + (+10) + (-7) + \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{7}{3}\right)$

3.5 $(+5{,}3) + (-7) + \left(-\frac{1}{3}\right) + (-5{,}3) + \left(+\frac{4}{3}\right) + (+4{,}1)$

SUBTRAÇÃO EM $\mathbb{Q}$

As propriedades da subtração em $\mathbb{Z}$, mantêm-se para a subtração em $\mathbb{Q}$. Assim, para subtrair dois números racionais relativos, adiciona-se ao primeiro (aditivo) o simétrico do segundo (subtrativo).
Então, para calcular $\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(+\frac{2}{3}\right)$ deve adicionar-se ao aditivo o simétrico do subtrativo, isto é:

$$\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(+\frac{2}{3}\right)=\left(-\underset{(\times 1)}{\frac{5}{6}}\right)+\left(-\underset{(\times 2)}{\frac{2}{3}}\right)$$

$$=\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{4}{6}\right)=-\frac{5}{6}-\frac{4}{6}=-\frac{9}{6}=-\frac{3}{2}$$

Uma expressão em que as subtrações são todas transformadas em adições sucessivas chama-se uma **adição algébrica**.
Numa adição algébrica podemos suprimir todos os sinais operacionais de adição (+) e os parêntesis que lhes seguem (desembaraçar dos parêntesis).

Exemplos:

1. $(+1{,}2)-(+3)+(-0{,}4)-(-1{,}5)$

2. $(-3)-\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)-(+2)$

Resolução:

Começaremos por transformar as subtrações em adições.

1. $(+1{,}2)-(+3)+(-0{,}4)-(-1{,}5)=$

$=(+1{,}2)+(-3)+(-0{,}4)+(+1{,}5)=$

$=+1{,}2-3-0{,}4+1{,}5=$

$=-1{,}8-0{,}4+1{,}5=$

$=-2{,}2+1{,}5=-0{,}7$

2. $(-3)-\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)-(+2)=$

$=(-3)+\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+(-2)=$

$=-3+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-2=$

$=-\frac{18}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{6}-\frac{12}{6}=$

$=-\frac{15}{6}-\frac{14}{6}=-\frac{29}{6}$

3. Calcula o valor da expressão

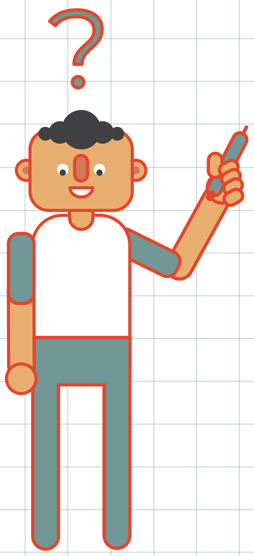
$\left(+\frac{1}{3}\right)-(-1{,}3)+(-2)$

Resolução:

$\left(+\frac{1}{3}\right)-(-1{,}3)+(-2)=\frac{1}{3}+1{,}3-2=$

$=\frac{1}{3}+\frac{13}{10}-2=$

$=\frac{10}{30}+\frac{39}{30}-\frac{60}{30}=-\frac{11}{30}$



ATIVIDADES

1. Calcula:

1.1 $\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right)$ **1.2** $0{,}3 - (+\,2{,}4)$ **1.3** $\left(-\frac{1}{6}\right) - (-\,0{,}2)$

2. Calcula o número designado pela expressão a-b para:

2.1 $a = \left(-\frac{2}{5}\right)$ e $b = \left(-\frac{1}{3}\right)$ **2.2** $a = 0{,}4$ e $b = \left(-\frac{1}{6}\right)$

2.3 $a = -\,4{,}2$ e $b = 2$ **2.4** $a = \frac{3}{2}$ e $b = -\,3$

3. Traduz para linguagem matemática e, de seguida determina o seu valor:

3.1 A diferença entre $-\,2$ e o simétrico de $-\frac{1}{3}$.

3.2 A diferença entre $\frac{2}{5}$ e o simétrico de $\frac{3}{8}$.

4. Completa de modo a obteres afirmações verdadeiras:

4.1 $\boxed{} - (+5) = -\,4$ **4.2** $-\,\frac{1}{3} - \boxed{} = \frac{1}{9}$

4.3 $\boxed{} - 1{,}45 = -\,1{,}456$ **4.4** $7{,}8 - \boxed{} = 8{,}8$

5. Escreve as expressões na forma simplificada e calcula o seu valor:

5.1 $\left(+\frac{5}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{3}{4}\right) + (-\,1)$ **5.2** $\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) - \left(+\frac{9}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$

5.3 $\left(-\frac{4}{9}\right) + \left(-\frac{10}{9}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(+\frac{5}{3}\right)$ **5.4** $(+\,0{,}02) - \left(-\frac{3}{2}\right) + (\,0{,}06\,) - \left(-\frac{2}{5}\right)$

6. Calcula:

6.1 $-\,2 + 6 - 15 + 3 - 7$ **6.2** $-\,0{,}2 + 3 - 1{,}25 + 2{,}25$

6.3 $-\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \frac{9}{6} + \frac{2}{3}$ **6.4** $\frac{2}{3} + 3 - \frac{1}{6} - 0{,}75 + \frac{5}{6}$

7. Desembaraça de parêntesis e calcula:

7.1 $(+15)-(+12)+(16)-(-60)$

7.2 $\frac{1}{3}-(-1)-(+2)-\frac{4}{3}$

7.3 $-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)+\left(1+\frac{2}{3}\right)$

7.4 $-\left(1-\frac{1}{5}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}-2\right)$

7.5 $2{,}7-[1{,}1+(-3{,}1+2{,}7)]$

8. Faz a correspondência entre os elementos da coluna A com os da coluna B.

A	B
$\frac{1}{2}-1-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$-\left(\frac{1}{2}-1\right)-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{6}$
$\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{5}{6}$
$-\frac{1}{2}+\left\|-1-\frac{1}{3}\right\|$	$-\frac{1}{6}$
$\left\|\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right\|+\|-1\|$	$\frac{5}{6}$

9. Completa o quadro:

a	*b*	*c*	*Simétrico de a*	*Simétrico de b*	*b+c*	*a-(b+c)*	*a-b-c*
- 2,4	1,8	0,4					
1,5		1,2		2,7			
		5	-5	11,3			
	- 4,7	-6	8				
-10		0,3			0		
	- 1,5	- 7,2	-3,4				

MULTIPLICAÇÃO EM $\mathbb{Q}$

Depois de efetuarmos a adição e a subtração em $\mathbb{Q}$, vamos agora estudar a multiplicação e as respetivas propriedades. Nos anos anteriores, tiveste a oportunidade de multiplicar números inteiros relativos e números racionais não negativos representados nas formas inteira, decimal e fracionária.

Por exemplo:

- $2 \times 8 = 16$
- $(-5) \times (-4) = 20$
- $(+7) \times (-2) = -14$
- $3 \times 0{,}1 = 0{,}3$
- $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

Vamos agora completar o estudo da multiplicação de números racionais, incluindo o caso da multiplicação de números racionais negativos. Comecemos com revisões das operações estudadas.

Multiplicação de dois números racionais positivos

Recordando a multiplicação de números racionais não negativos estudada no sexto ano, temos, por exemplo:

$(+4) \times (+1{,}2) = 4 \times 1{,}2 = 4{,}8$

$$\left(+\frac{1}{4}\right) \times \left(+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

O produto de dois números racionais positivos é um número racional positivo.

Multiplicação de dois números racionais de sinais contrários

O António possui uma conta num Banco. O seu saldo é zero porque fez três levantamentos seguidos de 5 mil escudos. Escreve a expressão que traduz os levantamentos.

Como já sabes, os levantamentos são representados por números negativos. Então podemos dizer que a expressão que representa esses levantamentos é:

$(-5) + (-5) + (-5) = -15$ ou

$(-5) + (-5) + (-5) = 3 \times (-5) =$

$= (+3) \times (-5) = -15$

De igual modo, podemos multiplicar:

$$2 \times \left(-\frac{3}{7}\right) = \left(-\frac{3}{7}\right) + \left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{6}{7}$$

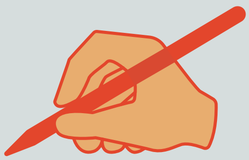
Então, podemos concluir que:

O produto de um número racional positivo por um número racional negativo é um número racional negativo.

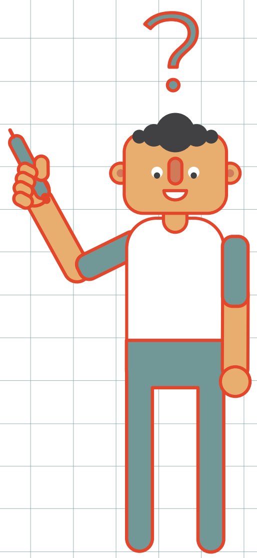
Multiplicação de dois números racionais negativos

O João tem um cofre. Se em cada dia ele tirar do cofre 50 escudos, quer dizer que há quatro dias ele tinha mais 200 escudos em relação ao que tem atualmente.
Simbolicamente:
Representando um dia passado por (– 1) e o levantamento de um escudo por (– 1), temos
«Há quatro dias», ou «quatro dias passados», representamos por (– 4); O «levantamento de 50 escudos» representamos por (– 50) ;
Há quatro dias ele tinha (+ 200) que atualmente.
Então: $(-50) \times (-4) = +200$

O produto de dois números racionais negativos é um número racional positivo.



ATIVIDADES:



1. Calcula:

1.1 $(-3) \times (-2)$ **1.2** -3×4 **1.3** $7 \times (-8)$ **1.4** $-1 \times 5{,}4$

1.5 $-2{,}1 \times 3{,}2$ **1.6** $4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)$ **1.7** $-\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{6}\right)$ **1.8** $\left(+\frac{2}{3}\right) \times \left(+\frac{3}{4}\right)$

1.9 $\left(-\frac{3}{7}\right) \times \left(+\frac{1}{3}\right)$ **1.10** $-\frac{1}{8} \times 0$ **1.11** $1 \times \left(-\frac{3}{5}\right)$ **1.12** $0{,}33 \times 1$

2. Qual é o sinal de cada um dos seguintes produtos:

2.1 $4 \times (-1{,}75)$ **2.2** $(-18{,}94) \times (-12{,}89)$

2.3 $(-3) \times (-40) \times 101{,}15$ **2.4** $\left(-\frac{9}{8}\right) \times \left(-\frac{51}{4}\right) \times \left(-\frac{71}{90}\right)$

3. Copia para o teu caderno e completa a tabela:

x	- 2	$-\frac{1}{3}$	- 1,3	$-\frac{2}{5}$
- 7				
- 0,1				
1				
$\frac{1}{4}$				

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO EM $\mathbb{Q}$

Verificaremos as propriedades da multiplicação em $\mathbb{Q}$ através do quadro seguinte, depois de o teres completado.

a	*b*	*c*	*a x b*	*b x a*	(*axb*)x*c*	*a*x(*bxc*)	*a*x(*b+c*)	*axb+axc*	(*b+c*)x*a*	*bxa+cxa*
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{4}$								
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$	- 5								
- 2,1	-0,1	- 10								
0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$								
1	- 0,2	- 3								
$\frac{1}{6}$	6	- 2								
$-\frac{7}{8}$	$-\frac{8}{7}$	$\frac{9}{4}$								

A partir do quadro, podemos verificar que:

A multiplicação em $\mathbb{Q}$ é *comutativa.*
$a \times b = b \times a$ com a e $b \in \mathbb{Q}$
A multiplicação em $\mathbb{Q}$ é associativa.
$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ com a, b e $c \in \mathbb{Q}$
A multiplicação em $\mathbb{Q}$ tem elemento neutro, que é a unidade (1)
$a \times 1 = 1 \times a = a$ com $a \in \mathbb{Q}$
A multiplicação em $\mathbb{Q}$ tem elemento absorvente, que é o zero (0)
$a \times 0 = 0 \times a = 0$ com $a \in \mathbb{Q}$
Todo o número racional, diferente de zero, tem inverso (oposto para a multiplicação).
$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$ com $a \in \mathbb{Q}$ $(a \neq 0)$

Podemos verificar ainda que:

A multiplicação em $\mathbb{Q}$ também é distributiva em relação à adição algébrica.

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
$(b + c) \times a = b \times a + c \times a = a \times b + a \times c$

Exemplo:

Calcular o valor das expressões:

1. $2 \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

2. $\left(\frac{1}{4} - 2\right) \times \frac{1}{2}$

Resolução:

1. $2 \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

<u>1º Processo</u>

Resolver, em primeiro lugar, o que está entre parêntesis:

$$2 \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 2 \times \left(-\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) =$$

$$= 2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

<u>2º Processo</u>

Aplicar a propriedade distributiva:

$$2 \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \times \frac{1}{3} =$$

$$= -\frac{2}{2} + \frac{2}{3} = -\frac{6}{6} + \frac{4}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Ambos os processos conduzem ao mesmo resultado $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

2. $\left(\frac{1}{4} - 2\right) \times \frac{1}{2}$

<u>1º Processo</u>

Resolver, em primeiro lugar, o que está entre parêntesis:

$$\left(\frac{1}{4} - 2\right) \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{8}{4}\right) \times \frac{1}{2} =$$

$$= \left(-\frac{7}{4}\right) \times \frac{1}{2} = -\frac{7}{8}$$

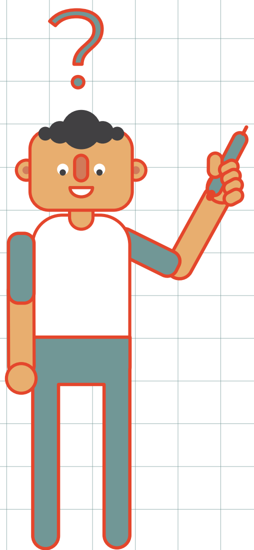
<u>2º Processo</u>

Aplicar a propriedade distributiva:

$$\left(\frac{1}{4} - 2\right) \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{2}{2} = \frac{1}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{7}{8}$$

Ambos os processos conduzem ao mesmo resultado $\left(-\frac{7}{8}\right)$.



ATIVIDADES

1. Completa, de modo a obteres afirmações verdadeiras, e identifica as propriedades utilizadas:

1.1 $-\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{7}-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{14}+\cdots\cdots$

1.2 $-\frac{2}{5}\times\frac{7}{6}=\frac{7}{6}\times\cdots\cdots$

1.3 $-\frac{3}{8}\times\cdots=1$

1.4 $\frac{4}{5}\times\cdots=0$

1.5 $\frac{2}{9}\times\left(-\frac{3}{2}\times\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{2}{9}\times\cdots\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)$

1.6 $0{,}1\times(-2+\ldots)=-0{,}2+0{,}1$

2. Efetua a multiplicação de:

2.1 $-\frac{2}{3}$ pelo seu inverso.

2.2 $\frac{4}{3}$ pelo simétrico do inverso de $-\frac{1}{3}$.

2.3 o inverso de $-\frac{1}{7}$ pelo simétrico de $\frac{1}{7}$.

3. Calcula os seguintes produtos:

3.1 $|-4\times(-7)|$ e $|-4|\times|-7|$

3.2 $\left|\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\right|$ e $\left|\frac{2}{5}\right|\times\left|\frac{1}{3}\right|$

3.3 $|4\times(-0{,}2)|$ e $|4|\times|-0{,}2|$

3.4 $\left|-3\times\frac{2}{3}\right|$ e $|-3|\times\left|\frac{2}{3}\right|$

No exercício **3**, podemos verificar que:

O valor absoluto do produto é igual ao produto dos valores absolutos dos fatores. $|a\times b|=|a|\times|b|$

DIVISÃO EM $\mathbb{Q}$

A divisão entre dois números racionais é um número racional cujo produto pelo divisor é igual ao dividendo. A divisão é a operação inversa da multiplicação.

Assim, por exemplo:

- $12 \div 4 = 3$ porque $4 \times 3 = 12$
- $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{10}{9}$ porque $\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$

Recorda que:

Para dividir dois números racionais basta multiplicar o primeiro (dividendo) pelo inverso do segundo (divisor). O divisor não pode ser zero.
Como a divisão pode ser transformada numa multiplicação, as regras da multiplicação mantêm-se válidas para a divisão.

Exemplos:

a) $-\frac{2}{3} \div \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

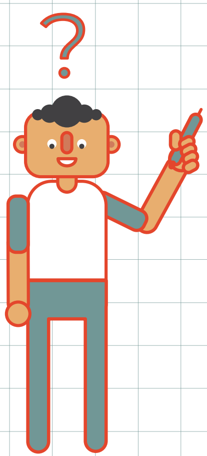
b) $\frac{3}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$

O quociente de dois números racionais com o mesmo sinal é um número positivo.

c) $-\frac{3}{7} \div \frac{2}{5} = -\frac{3}{7} \times \frac{5}{2} = -\frac{15}{14}$

d) $4 \div (-0{,}2) = -20$

O quociente de dois números racionais com sinais contrários é um número negativo.



ATIVIDADES

1. Completa, de modo a obteres igualdades verdadeiras:

1.1. $\frac{2}{5} \div \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5} \times \cdots$

1.2. $-\frac{3}{7} \div \cdots = -\frac{3}{7} \times \frac{11}{6}$

1.3. $\cdots \div (-5) = \frac{11}{10} \times \cdots$

2. Calcula:

2.1 $-\frac{1}{3} \div \frac{5}{2}$

2.2 $\frac{3}{5} \div (-5)$

2.3 $-\frac{2}{7} \div \left(-\frac{1}{3}\right)$

2.4. $-2 \div \frac{3}{4}$

2.5 $-\frac{7}{4} \div 2{,}1$

2.6 $\dfrac{-\frac{3}{8}}{-\frac{1}{4}}$

2.7 $\dfrac{2}{\frac{4}{5}}$

2.8 $\dfrac{-\frac{2}{3}}{7}$

3. Determina o valor de cada uma das expressões:

3.1 $\left(-\frac{5}{6} + \frac{7}{4}\right) \div \frac{1}{3}$

3.2 $\dfrac{(-9) \div 3 + (-7) \div (-1)}{-(-10 + 15) \div (-5) + 1}$

3.3 $\dfrac{9 - [1 - (8 - 4 \times 0{,}25)]}{4 \times (-3) \div (-12)}$

3.4 $\dfrac{2 - \frac{5}{6} - \frac{1}{2}}{-1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9}}$

POTENCIAÇÃO EM $\mathbb{Q}$

Sabes que uma potência representa um produto de fatores iguais. O fator que se repete é a **base** da potência; o número de vezes que ele se repete é o **expoente** da potência.
A potenciação em $\mathbb{Q}$ tem as mesmas propriedades que a potenciação em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{Z}$, estudadas em anos anteriores.

Por exemplo:

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$

$(-0{,}1)^3 = (-0{,}1) \times (-0{,}1) \times (-0{,}1) = -0{,}001$

$a^n = a \times a \times a \ldots \times a$ (n fatores)

Repara que:

$(-2)^4$ é uma potência de base (-2) e expoente 4.
Mas -2^4 é o simétrico da potência de base 2 e expoente 4

$-2^4 = -(2 \times 2 \times 2 \times 2)$

Portanto, $(-2)^4 \neq -2^4$

Repara também que $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \neq \frac{2^4}{3}$ já que $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$ e
$\frac{2^4}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3} = \frac{16}{3}$.

Será que podemos determinar o sinal de uma potência de base racional sem a desenvolvermos?

Observa os seguintes exemplos:

Base positiva

$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

Base negativa

$\left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{25}$

$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125}$

- Se a base for positiva, o resultado é positivo.
- Se a base for negativa e o expoente par, o resultado é positivo.
- Se a base for negativa e o expoente ímpar, o resultado é negativo.
- Se a base for nula, o valor da potência é zero para qualquer que seja o expoente natural.

Base	Expoente	Sinal do resultado
positiva **(+)**	par ou ímpar	positivo (+)
	par	positivo (+)
negativa **(-)**	ímpar	negativo (-)

As regras conhecidas para o cálculo de produtos e quocientes de potências mantêm-se válidas em $\mathbb{Q}$.

PRODUTO DE POTÊNCIAS COM A MESMA BASE OU MESMO EXPOENTE

Repara nos exemplos que se seguem:

a) $\left(-\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{6}\right)^3 = \left(-\frac{1}{6}\right) \times \left(-\frac{1}{6}\right) \times \left(-\frac{1}{6}\right) \times \left(-\frac{1}{6}\right) \times \left(-\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}\right)^5$

b) $(0{,}1)^3 \times (-2)^3 = [(0{,}1) \times (0{,}1) \times (0{,}1)] \times [(-2) \times (-2) \times (-2)]$

Utilizando as propriedades da multiplicação (comutativa e associativa), podemos escrever:

$(0{,}1)^3 \times (-2)^3 = [(0{,}1) \times (-2)] \times [(0{,}1) \times (-2)] \times [(0{,}1) \times (-2)]$

$= (-0{,}2) \times (-0{,}2) \times (-0{,}2) = (-0{,}2)^3$

O produto de potências com a mesma base é uma potência com a mesma base que os fatores e expoente igual à soma dos expoentes dos fatores.

$$a^n \times a^m = a^{n+m},\ n, m \in \mathbb{N}$$

O produto de potências com o mesmo expoente é uma potência com o mesmo expoente que os fatores, sendo a base igual ao produto das bases dos fatores. $a^n \times b^n = (a \times b)^n,\ n \in \mathbb{N}$

QUOCIENTE DE POTÊNCIAS COM A MESMA BASE OU MESMO EXPOENTE

Repara nos exemplos que se seguem:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \div \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{1}{32} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \left[\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right)\right] \times \left[\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right] =$

$= \left(-\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}\right)^3$

O quociente de potências com a mesma base é uma potência com a mesma base que o dividendo e o divisor, sendo o expoente igual à diferença dos expoentes do dividendo e do divisor.

$$a^n \div a^m = a^{n-m},\ n, m \in \mathbb{N}\ (a \neq 0 \text{ e } n \geq m)$$

O quociente de potências com o mesmo expoente é uma potência com o mesmo expoente que o dividendo e o divisor, sendo a base igual ao quociente das bases do dividendo e do divisor.

$$a^n \div b^n = (a \div b)^n, \text{ com } b \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$$

POTÊNCIA DE UMA POTÊNCIA

Considera as expressões:

$\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^2\right]^3$ e $[(0{,}2)^5]^2$.

Desenvolvendo a potência, temos:

$$\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^2\right]^3 = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \left(-\frac{2}{5}\right)^6$$

Mas $\left(-\frac{2}{5}\right)^6 = \left(-\frac{2}{5}\right)^{3\times2}$. Logo, $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^2\right]^3 = \left(-\frac{2}{5}\right)^{2\times3}$

$[(0{,}2)^5]^2 = (0{,}2)^5 \times (0{,}2)^5 = (0{,}2)^{10}$

Uma potência, elevada a um expoente (potência de potência), é igual a uma potência com a base da primeira e cujo expoente é igual ao produto dos expoentes. $(a^n)^m = a^{n \times m}$

POTÊNCIA DE EXPOENTE NULO

Consideremos o quociente entre duas potências com a mesma base e o mesmo expoente,

por exemplo $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^3$.

Como o dividendo é igual ao divisor, tem-se

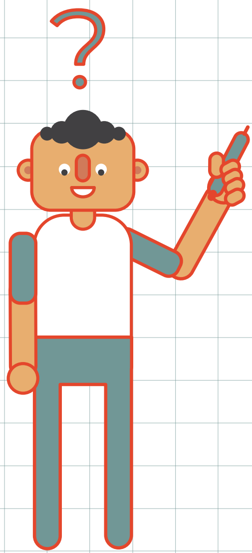
$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = 1.$$

Por outro lado, aplicando a regra do quociente de potências com a mesma base, mantendo a base e subtraindo os expoentes, fica

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^0$$

Então tem de ser $\left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

Assim, duma maneira geral, tem-se: Se $a \neq 0$, então $a^0 = 1$



ATIVIDADES DE CONSOLIDAÇÃO

1. Calcula o valor de cada uma das seguintes potências:

1.1 $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ **1.2** $(-5)^2$ **1.3** $\left(\frac{4}{9}\right)^2$ **1.4** $(-0{,}1)^3$ **1.5** -2^5

1.6 $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ **1.7** $(2^3)^2$ **1.8** $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2$ **1.9** 0^5 **1.10** $\left(\frac{1}{2}\right)^0$

2. Sem efetuares as operações, indica o sinal das potências:

2.1 $(-4)^{27}$ **2.2** $\left(-\frac{1}{7}\right)^{16}$ **2.3** $\left(\frac{1}{3}\right)^9$ **2.4** $(0{,}5)^{10}$ **2.5** -3^{10} **2.6** $\left[\left(-\frac{1}{7}\right)^5\right]^3$

3. Transforma numa só potência:

3.1 $(-2{,}4)^{12} \times (-2{,}4)^5$ **3.2** $3{,}7^4 \times 10^4$ **3.3** $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \times 12^3$ **3.4** $\left(-\frac{2}{5}\right)^7 \div \left(-\frac{2}{5}\right)^5$

3.5 $\left(-\frac{3}{2}\right)^{24} \div \left(\frac{3}{2}\right)^{22}$ **3.6** $\left(-\frac{1}{6}\right)^{16} \div \left(\frac{1}{6}\right)^{15}$ **3.7** $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 \div \left(\frac{1}{4}\right)^3$

3.8 $\left(-\frac{3}{7}\right)^2 \div \left(-\frac{2}{9}\right)^2$ **3.9** $[(-0{,}2)^3]^5$ **3.10** $\left[\left(-\frac{1}{8}\right)^4\right]^2$

4. Calcula o valor das seguintes expressões:

4.1 $(-2)^6 \div (-2)^4 \times (-4)^2$ **4.2** $\left(-\frac{7}{9}\right)^2 \times \left(-\frac{7}{9}\right)^4 \div \left(-\frac{7}{9}\right)^5$ **4.3** $(3^4)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{12}$

4.4 $\dfrac{(-3)^8 \times [(-3)^{13}]^2}{[(-2)^{17}]^2}$ **4.5** $\dfrac{-1-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)}{2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$ **4.6** $(-1)^{98}+(-1)^{99}-(-1)^{100}-(-1)^{101}$

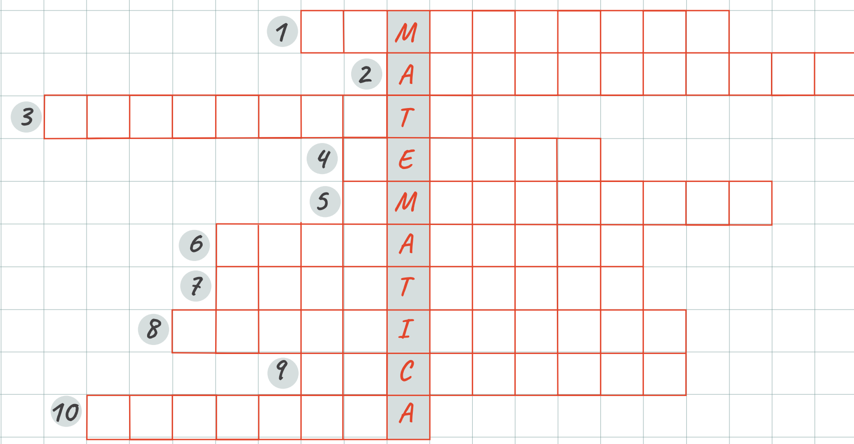
4.7 $\dfrac{\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^5 \div \left(1+\frac{1}{2}\right)^3\right]^4 \div \left(-\frac{3}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}-2\right)^2}$ **4.8** $\dfrac{\left(\frac{3}{8}\right)^7 \div \left(2-\frac{3}{8}\right)^4}{[(2-1)^3]^{15} \div [(-2+3)^7]^6}$

5. Determina o valor da expressão $\dfrac{2a-b^3}{a+b}$, supondo que:

5.1 $a = -\frac{2}{3}$ e $b = -2$ **5.2** $a = 0{,}1$ e $b = -1$

6. Calcula o valor da expressão $a \times \dfrac{b}{c}$ para: $a = -1{,}2$; $b = \dfrac{3}{5}$ e $c = -4$

7. Preenche esta grelha de acordo com as indicações que se seguem.



1 Propriedade da adição que justifica a igualdade:

$$\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{3}{5}\right) + (-4) = \left(+\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + (-4)$$

2 Propriedade da multiplicação que permite escrever a igualdade:

$$-\frac{1}{3} \times (-4) \times \left(+\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3} \times \left(+\frac{3}{2}\right)$$

3 O zero é elemento ____________________ da multiplicação em $\mathbb{Q}$.

4 O zero é elemento ____________________ da adição em $\mathbb{Q}$.

5 A divisão por zero é ____________________.

6 Verdadeiro ou falso? $\left|-\frac{1}{27}\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^3$

7 Os números $-\frac{5}{7}$ e $+\frac{5}{7}$ dizem-se ____________________.

8 Propriedade da multiplicação que justifica a igualdade:

$$-\frac{2}{5} \times \left(-2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{5} - \frac{2}{15}$$

9 $-\frac{7}{11}$ é um número relativo que pertence ao conjunto dos números ____________________.

10 Qualquer potência de expoente par é ________________________.

UNIDADE 3

Organização e Tratamento de Dados

UNIDADE 3

ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS

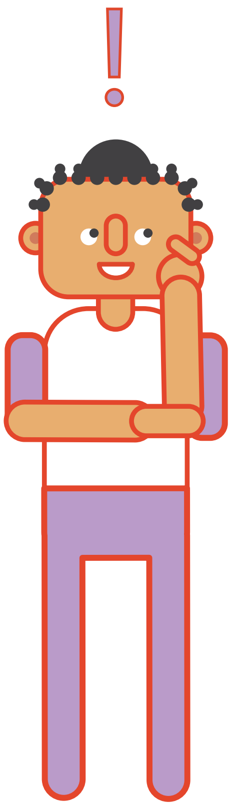
CONTEÚDOS:

- Planeamento estatístico
  Fases do método estatístico
  Recolha de dados
  População e amostra
- Tratamento de informação
  Organização, análise e interpretação de dados
  Medidas de localização

OBJETIVOS:

- Formular questões e planear adequadamente a recolha de dados, tendo em vista o estudo a realizar.
- Identificar e minimizar possíveis fontes de enviesamento na recolha dos dados.
- Distinguir entre população e amostra e ponderar elementos que possam afetar a representatividade de uma amostra em relação à respetiva população.
- Determinar frequências: absoluta, absoluta acumulada e relativa.
- Construir, analisar e interpretar representações dos dados (incluindo o histograma) e tirar conclusões.
- Determinar a média, a mediana e a moda de dados.
- Escolher as medidas de localização mais adequadas, para resumir a informação contida nos dados.
- Comparar as distribuições de vários conjuntos de dados e tirar conclusões.

INTRODUÇÃO



Frequentemente, deparamo-nos com informações nos meios de comunicação social, tais como:

- "os novos inscritos no 1º ano do ensino básico são maioritariamente do sexo feminino";
- "a média das idades dos alunos do agrupamento X é de oito anos";
- "metade dos alunos de uma turma teve notas superiores a 14 valores numa determinada disciplina".

Estas afirmações têm por base estudos estatísticos. Como vimos em anos anteriores, os estudos estatísticos são, muitas vezes, apresentados por meio de tabelas ou gráficos, que permitem com maior facilidade tirar conclusões sobre as caraterísticas estatísticas estudadas nas populações estatísticas alvo.

Para estarmos bem informados devemos aprender não só a ler e a interpretar os resultados de um estudo estatístico como também a registar, agrupar e ordenar dados, construir gráficos e obter conclusões dos nossos próprios estudos.

POPULAÇÃO E AMOSTRA - REVISÕES

Certamente que te recordas ainda que a Estatística se aplica ao estudo de uma ou mais caraterísticas de um conjunto com um determinado número de elementos. A esse conjunto damos o nome de **população**. A cada elemento da população chama-se **unidade estatística.** Ao número de unidades estatísticas de uma população chama-se **dimensão da população**.

Em determinados estudos estatísticos torna-se difícil a recolha de dados a todos os elementos da população como, por exemplo, quando se pretende saber qual o programa da televisão preferido pelos cabo-verdianos ou ainda saber qual o partido que será mais votado nas próximas eleições legislativas. Nestes casos, recorre-se a um subconjunto da população menos numeroso, mas significativo.

A um subconjunto representativo da população em que incide o estudo estatístico chama-se **amostra**. Ao número de unidades estatísticas de uma amostra chama-se **dimensão da amostra**.

Exemplo 1:
Num estudo de audiências das diferentes rádios, a nível nacional, usa-se uma amostra ou uma população?

Resolução
Seria difícil estudar a população que tem acesso às diferentes rádios nacionais. Por isso, recorre-se a uma amostra representativa no sentido de obter resultados credíveis.

Exemplo 2:
De entre os 1500 alunos de uma escola, selecionaram-se 60 para um inquérito sobre o programa de televisão preferido. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Programa Preferido	Nº de alunos
Desporto	16
Desenhos animados	24
Telenovela	20

Neste conjunto de dados, indica:
1. A população.
2. A amostra considerada.

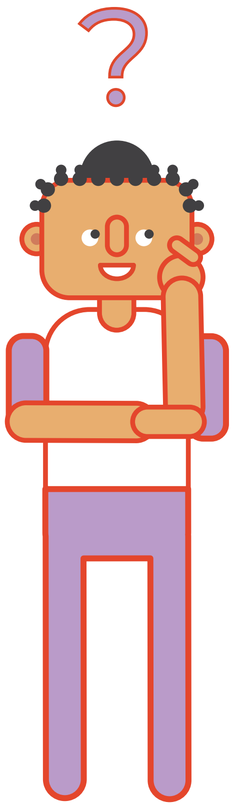
Resolução
1. A população é constituída pelos 1500 alunos da escola;
2. A amostra considerada é constituída pelos 60 alunos inquiridos.

NATUREZA DOS DADOS

Com o objetivo de conhecer algumas caraterísticas dos alunos de uma turma do 7º Ano, procedeu-se a uma recolha de dados relativos a:

- idade dos alunos;
- altura dos alunos;
- género;
- número de irmãos;
- profissão dos pais.

Como podes ver, estes dados são de fácil obtenção e podem ser recolhidos com segurança. Podemos ainda dizer que o género e a profissão dos pais são dados de natureza qualitativa, sendo a idade, a altura e o número de irmãos, dados de natureza quantitativa.



O MÉTODO ESTATÍSTICO

Um estudo estatístico deve ser planeado de acordo com um conjunto de fases, denominadas **fases do método estatístico**.
Podemos considerar as seguintes fases:

1. Definição do problema;
2. Planificação do processo de resolução;
3. Recolha de dados;
4. Organização de dados;
5. Apresentação dos dados;
6. Análise e interpretação dos dados;
7. Resposta ao problema.

Definição do problema - consiste na definição e formulação correta do problema a ser estudado, ao qual se pretende aplicar o método estatístico. Quando é que se deve optar pelo método estatístico, em oposição a outros métodos, diretos, por exemplo? Nesta fase, deve-se analisar ainda outros estudos feitos sobre o mesmo tema.

Planificação do processo de resolução - depois de definir o problema, é preciso determinar um processo para o resolver e, em especial, como obter informações sobre a variável ou as variáveis em estudo. É nesta fase que se decide pela observação de toda a população ou de uma amostra.

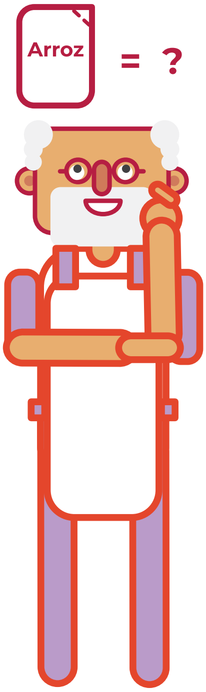
Recolha de dados - os dados podem ser recolhidos através de: questionários, observação, experimentação e pesquisa bibliográfica.

Organização de dados - consiste em sintetizar os dados através da sua contagem e agrupamento. Deste modo, obtém-se um conjunto de números que possibilita distinguir o comportamento do caráter estatístico.

Apresentação dos dados - estes podem ser apresentados por tabelas ou por gráficos que permitem sintetizar grandes quantidades dos mesmos, tornando mais fácil a compreensão do caráter em estudo e posteriormente a sua análise.

Análise e interpretação dos dados - nesta fase é necessário o cálculo de algumas medidas estatísticas com base nos dados recolhidos. Estas medidas permitem complementar a descrição do fenómeno, evidenciando algumas das suas caraterísticas particulares. Nesta fase ainda é possível, por vezes, “arriscar” alguma generalização, a qual envolverá sempre algum grau de incerteza.

Resposta ao problema - Nesta fase as medidas estatísticas são usadas para responder às questões formuladas com a colocação do problema.



Exemplo:

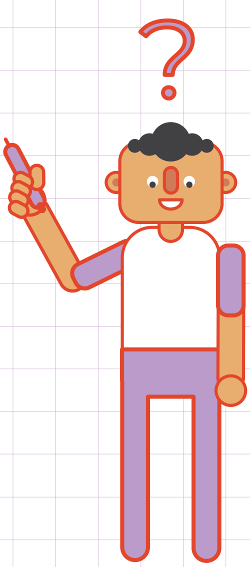
O Sr. João tem uma mercearia e quer saber quantos quilos de arroz deve adquirir, por mês, para satisfazer a procura dos clientes e não haver nem acumulação nem rotura de stock no final de cada mês.

Definição do problema - Que quantidade de arroz deve o Sr. João adquirir, para evitar o excesso ou a rotura do stock de arroz na sua loja?
Planificação - Análise da média de kg de arroz vendidos nos últimos 5 meses;
Recolha de dados - Através do registo das vendas mensais aos clientes;
Organização de dados – Balanço mensal das vendas;
Apresentação dos dados – Elaboração de um gráfico com as vendas mensais;
Análise e interpretação dos dados - Cálculo do valor médio de Kg de arroz vendidos mensalmente;
Resposta ao problema - Quantos Kg de arroz deve comprar.

ATIVIDADES

1. De entre as variáveis estatísticas indicadas abaixo, escolhe uma, e faz um estudo estatístico dessa variável na tua turma.

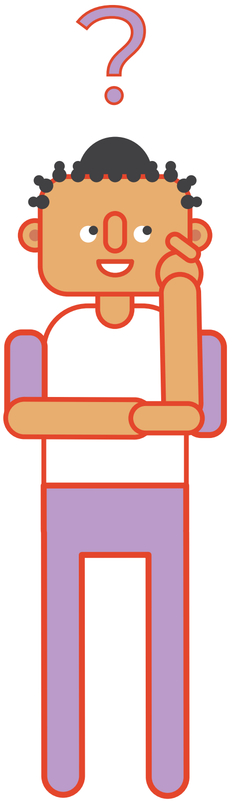
- idade;
- peso;
- desporto favorito;
- número de irmãos;
- tempo de estudo em casa, por dia.



2. Supondo que ias fazer um estudo sobre cada uma das variáveis estatísticas indicadas abaixo, diz, justificando, em quais delas utilizarias a população ou uma amostra:

2.1 qualidade da água produzida pela Electra;
2.2 aproveitamento escolar dos alunos de uma turma na tua escola;
2.3 audiência dos programas de uma televisão nacional;
2.4 qualidade dos ovos produzidos num aviário num determinado dia.

3. Indica dois exemplos em que se deva estudar toda a população e outros dois em que bastará estudar amostras.



TRATAMENTO DE INFORMAÇÃO
ORGANIZAÇÃO, ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DE DADOS

Nesta secção, para além de recorrer a conhecimentos adquiridos anteriormente, vamos introduzir novas ferramentas para a organização, análise e interpretação de dados estatísticos.

De acordo com as fases do método estatístico e com os conhecimentos adquiridos em anos anteriores, para o tratamento das informações torna-se necessário a organização, a representação, a análise e a interpretação dos dados que a elas se referem.

Para a organização dos dados, são utilizadas tabelas de frequências. Recorda que:

- **A frequência absoluta (f_a)** de um dado é o número de vezes que esse dado se verifica.
- **A frequência relativa (f_r)** de um dado é o quociente entre a frequência absoluta desse dado e o número total de dados.
- **Frequência absoluta acumulada (f_{ac})** de um dado é a soma das frequências absolutas desse dado com as frequências absolutas dos dados anteriores.

Exemplos:

1. A tabela seguinte representa o número de filhos de 80 famílias de uma comunidade.

Número de filhos (X)	Frequência absoluta (f_a)
1	15
2	20
3	30
4	10
5	5
Total	80

1.1 Determina as frequências absolutas acumuladas.

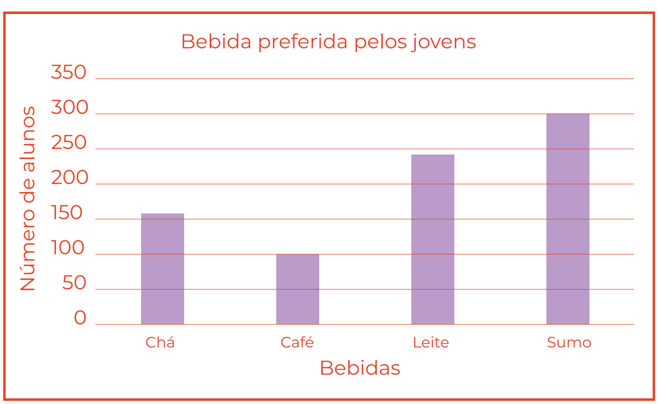
1.2 Quantas famílias têm três filhos ou menos?

2. Considera uma pesquisa realizada entre os jovens de uma escola, sobre a bebida preferida e cujo resultado se encontra na tabela abaixo.
Sabe-se que cada aluno escolheu apenas um tipo de bebida.

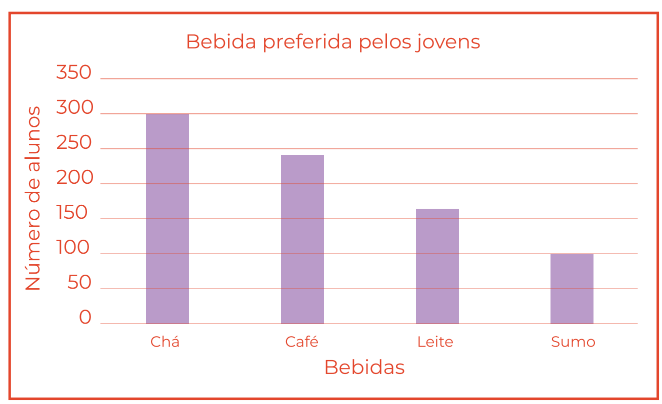
Bebida	Nº de alunos
Chá	160
Café	100
Leite	240
Sumo	300

2.1 Qual o total de jovens entrevistados?
2.2 Que bebida corresponde a 20% da preferência entre os jovens?
2.3 Qual dos gráficos a seguir corresponde às informações da tabela?
2.4 Representa os dados através de um gráfico circular.

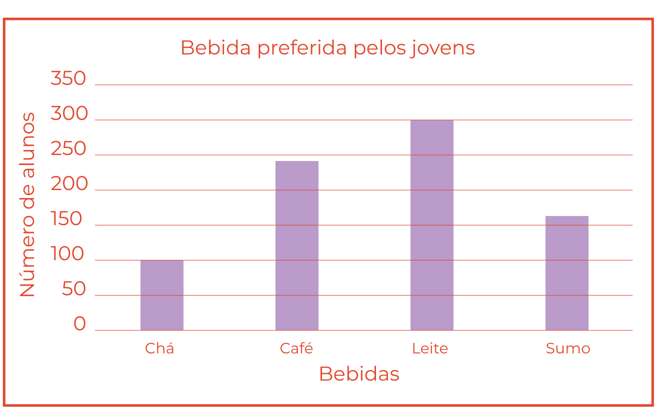
A



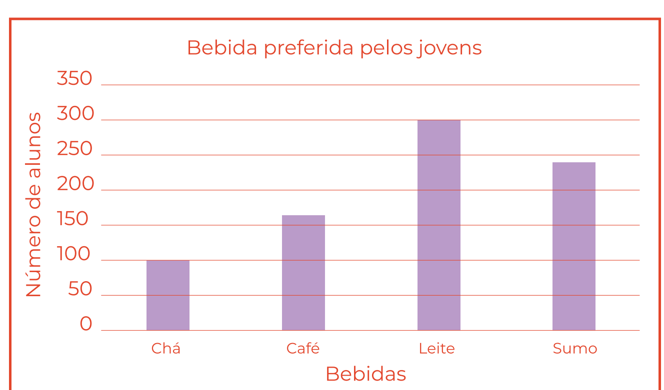
B



C



D



Resolução:

1.1 Tabela de frequências

Número de filhos (X)	Frequência absoluta (f_a)	Frequência absoluta acumulada (f_{ac})
1	15	15
2	20	20 + 15 = 35
3	30	30 + 35 = 65
4	10	10 + 65 = 75
5	5	5 + 75 = 80
Total	80	

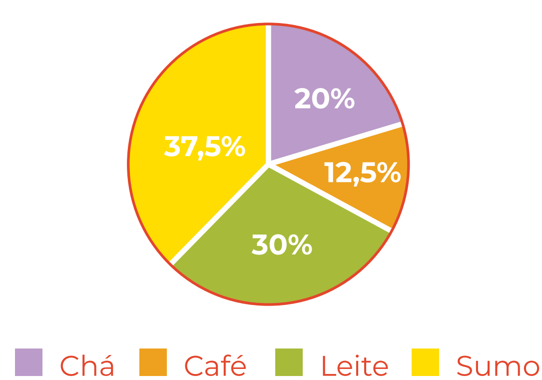
Repara que:

- A primeira frequência absoluta acumulada é igual à primeira frequência absoluta.
- A última frequência absoluta acumulada é igual ao número total de dados.

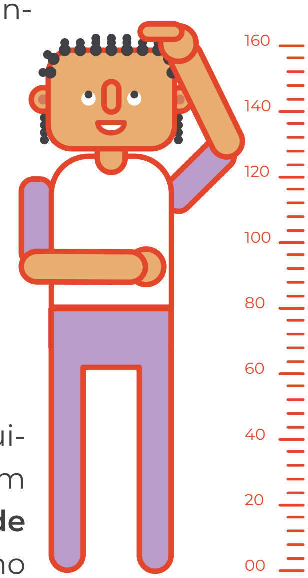
1.2 Pela frequência absoluta acumulada do valor 3, podemos concluir que 65 famílias têm três filhos ou menos.

2.1 Foram entrevistados 800 jovens.
2.2 Como já sabes, 20% de 800 calcula-se da seguinte forma:
0,2 x 800 = 160
Portanto, a bebida que corresponde a 20% das preferências dos jovens é o chá.
2.3 Pela análise, conclui-se que é o gráfico A.
2.4 Gráfico circular

Bebida preferida pelos jovens



3. O Carlos queria ter informações sobre as alturas dos colegas da turma. Por exemplo, quantos colegas têm menos de 1,5 *m* de altura? Qual a percentagem de colegas com altura entre 1,5 *m* e 1,7 *m*? Para isso, resolveu construir uma tabela de frequências e um gráfico com as alturas. Perguntou a cada um qual é a sua altura (em metros).
Obteve os seguintes resultados:



1,60	1,63	1,74	1,72	1,65
1,50	1,71	1,56	1,57	1,57
1,64	1,56	1,49	1,65	1,54
1,60	1,53	1,50	1,62	1,56
1,58	1,50	1,53	1,64	1,52

Resolução:

Para construir a tabela de frequências, o Carlos constatou que havia muitos dados diferentes. Para isso, teve a necessidade de agrupar os dados em classes com a mesma amplitude, começando por calcular a **amplitude total** da variável, isto é, a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo (valor máximo – valor mínimo).

Para calcular o número de classes, isto é, o nº de intervalos de valores nos quais são agrupados o conjunto dos dados, ele utilizou a seguinte fórmula: $2^k \geq n$, sendo n o número total de alunos (25) e k o número de classes.

O valor de k é o menor valor inteiro que torna a expressão $\mathbf{2^k \geq 25}$ verdadeira.
$2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$; $2^5 = 32$;

Logo o k = **5**

Sendo a amplitude da classe dada por: $a = \dfrac{\text{Valor máximo} - \text{valor mínimo}}{k}$

$$a = \frac{1{,}74 - 1{,}49}{5} = 0{,}05$$

Amplitude de uma classe é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da classe.
Para a primeira classe partimos do valor mínimo das observações que é, neste caso, 1,49 e adicionamos o valor da amplitude da classe.
1,49 + 0,05 = 1,54
Sendo assim, a classe a considerar é 1,49 ⊢ 1,54 e significa que contem todos os valores de 1,49 inclusivé até 1,54 exclusivé.

Para as classes seguintes vamos agir da mesma forma, tomando por valor inferior da classe seguinte o valor superior da classe anterior. Já temos, assim, as cinco classes formadas:

1,49 ⊢ 1,54
1,54 ⊢ 1,59
1,59 ⊢ 1,64
1,64 ⊢ 1,69
1,69 ⊢⊣ 1,75

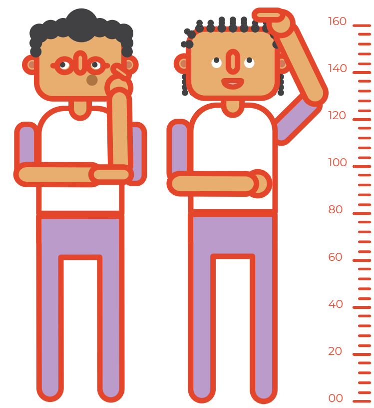


Tabela de frequências

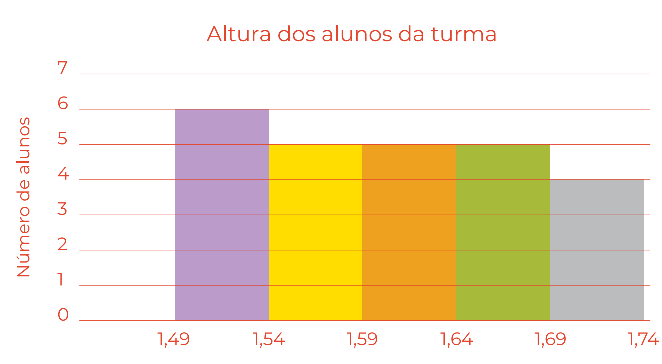
Altura (em m)	Frequência absoluta f_a	Frequência relativa f_r	Frequência relativa (%)	Frequência absoluta acumulada f_{ac}
1,49 ⊢ 1,54	6	0,24	24	6
1,54 ⊢ 1,59	5	0,2	20	11
1,59 ⊢ 1,64	5	0,2	20	16
1,64 ⊢ 1,69	5	0,2	20	21
1,69 ⊢⊣ 1,75	4	0,16	16	25
Total	25	1	100	

Representação gráfica dos dados

Para representar graficamente este tipo de dados, utilizamos um gráfico de barras especial, chamado **Histograma**.

A construção do histograma é feito da seguinte forma:

- As classes representam-se no eixo horizontal;
- As frequências das classes representam-se no eixo vertical;
- As barras são desenhadas verticalmente para cada uma das classes, não existindo qualquer espaço entre elas;
- A área de cada uma das barras é proporcional à frequência da respetiva classe;
- O gráfico deve ter um título adequado.



MEDIDAS DE LOCALIZAÇÃO

As medidas de localização ou tendência central (a média, a moda e a mediana) ajudam-nos a compreender e a realizar análises estatísticas, dando-nos uma ideia concreta sobre a distribuição dos dados e os valores em torno dos quais se agrupam.

Recorda que a **média aritmética**, ou **valor médio**, de um conjunto de dados obtém-se somando os produtos de cada dado pela sua frequência absoluta.

Vamos representar a média aritmética por $(\bar{X})$.

Exemplos:

1. As notas obtidas pelo João em cinco testes foram:
16, 17, 14, 13 e 15.

Calcula a média aritmética.

Resolução:

1. Como cada nota aparece apenas uma vez, a sua frequência absoluta é 1.

Assim a média é :

$$(\bar{X}) = \frac{16 + 17 + 14 + 13 + 15}{5} = 15$$

2. O número de horas de utilização da internet por um grupo de jovens, num determinado fim de semana foi:

2, 2, 4, 3, 2, 1, 5, 3, 5, 2, 1, 4, 5, 2, 2, 0, 3, 2, 1, 4, 0, 3, 3, 2, 1.

Determina a média aritmética.

Resolução:

Neste caso, como existem valores que se repetem, isto é, com frequência absoluta maior que 1, para calcular a média podemos organizar os dados numa tabela de frequências como forma de facilitar os cálculos.

Horas (X)	Número de Jovens (f_a)	X x f_a
0	2	0x2 = 0
1	4	1x4 = 4
2	8	2x8 = 16
3	5	3x5 = 15
4	3	4x3= 12
5	3	5x3 = 15
Total	25	62

$(\bar{X}) = \frac{62}{25} = 2{,}48$ A média é de 2,48 horas

A **Moda** de um conjunto de dados é o valor da variável que ocorre com maior frequência.

Vamos representar moda por (M_o).

Exemplo:
Os dados seguintes representam o total de faltas de doze alunos durante um trimestre letivo:

3 5 1 6 9 8 6 1 8 3 6 6

Nos dados apresentados, verifica-se que o dado que aparece com maior frequência é o **6**.
Logo, a moda é **6**

$$M_o = 6$$

Para um conjunto de dados, pode existir mais do que uma moda ou até nem existir moda.

- Se o conjunto de dados tiver duas modas, diz-se **bimodal**; no caso de ter mais do que duas modas, diz-se **multimodal**.

- Se o conjunto de dados não tiver moda, diz-se **amodal**.

Dados	Moda
7 7 8 2 4 7 8 8	7 e 8 (bimodal)
3 9 7 8 11 3 7 9 8 11	Não tem moda (amodal)

A **Mediana** de um conjunto de dados ordenados é o valor central dessa distribuição de dados. Se o **número de dados (n) é ímpar** esse valor ocupa a posição central; **se o número de dados é par** esse valor é a média aritmética dos dois valores centrais.

Vamos representar mediana por (M_d ou $\tilde{X}$).

Exemplos:

1. Calcula a mediana dos seguintes conjuntos de dados:

1.1 12 4 9 7 5

1.2 9 7 3 3 13 15

Resolução:

1. Começamos por ordenar os dados (crescentemente ou decrescentemente).

1.1 4 5 7 9 12

Como o número de dados é ímpar, a mediana é o valor que ocupa a posição central, isto é, 7.

Repara que a ordem desse valor mediano é dada por $\frac{n+1}{2}$, isto é : $\frac{5+1}{2} = 3$, ou seja, a mediana é o 3º elemento da distribuição ordenada.

$$M_d = 7$$

1.2 3 3 7 9 13 15

Neste caso o número de dados é par, a mediana é a média aritmética dos dois valores centrais, cujas ordens são dadas por: $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$, onde:

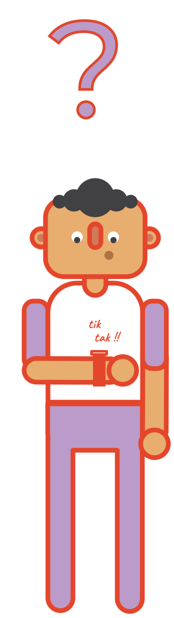
$\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$ e $\frac{n}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$

Sendo o 3º termo igual a 7 e o 4º termo igual a 9 , temos:

$$M_d = \frac{7+9}{2} = 8$$

2. Os dados seguintes representam a duração, em minutos, do atraso de um aluno na chegada à escola. Determina a mediana.

7	0	6	5	5
0	5	2	4	1
3	5	4	2	1



Resolução:

Neste caso, como existem valores que se repetem, isto é, com frequência absoluta maior que 1 , para calcular a mediana começamos por organizar os dados numa tabela de frequências, absoluta e absoluta acumulada, como forma de facilitar os cálculos.

Número de minutos X	f_a	f_{ac}
0	2	2
1	2	4
2	2	6
3	1	7
4	2	9
5	4	13
6	1	14
7	1	15
Total	15	

Como n (número de dados) é ímpar, a mediana é o valor central cuja ordem é dada por:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{15+1}{2} = 8$$

A mediana é o 8º termo da distribuição ordenada. Procura-se o número 8 na coluna das frequências acumuladas. Como esse valor não é encontrado, considera-se o número imediatamente superior, que é 9, correspondente ao valor 4, o que significa que há 9 valores menores ou iguais a 4.

A mediana é, então, o tempo, em minutos, correspondente a esse valor, isto é:

$$M_d = 4$$

3. A tabela seguinte indica as idades (em anos) de 26 crianças de um infantário. Calcula a mediana das idades dessas crianças.

Idade X	Número de crianças f_a
1	1
2	3
3	10
4	8
5	4
Total	26

Resolução

Começamos por determinar as frequências absolutas acumuladas.

Idade X	f_a	f_{ac}
1	1	1
2	3	4
3	10	14
4	8	22
5	4	26
Total	26	

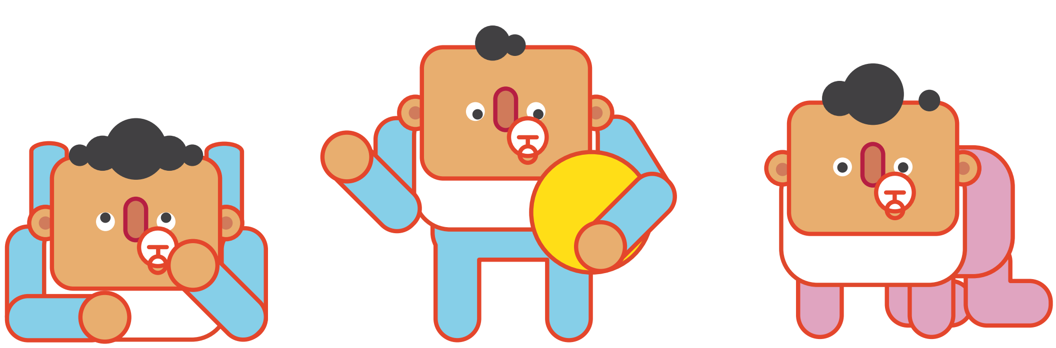
Neste caso, n é par, e a mediana corresponde à média aritmética dos dois valores centrais.

Para determinar a ordem desses valores tem-se:

$$\frac{n}{2} = \frac{26}{2} = 13 \text{ e } \frac{n}{2} + 1 = 13 + 1 = 14$$

Portanto, a mediana é:

$$M_d = \frac{3+3}{2} = 3$$



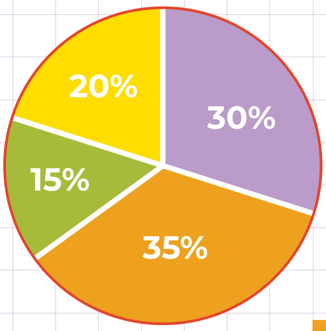
ATIVIDADES DE CONSOLIDAÇÃO

1. Como trabalho de grupo, recolhe, na tua turma, dados relativos ao número de irmãos que cada aluno tem.

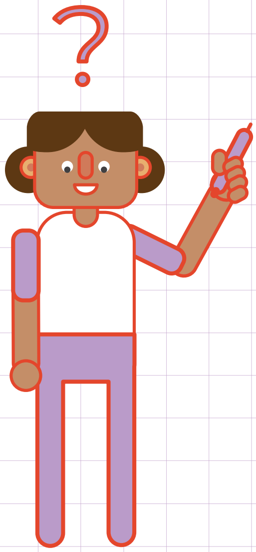
1.1 Organiza os dados numa tabela.
1.2 Completa a tabela com frequências absolutas acumuladas e frequências relativas.
1.3 Determina as medidas de localização da distribuição dos dados recolhidos.

2. Observa o gráfico circular da figura, que ilustra a preferência dos alunos do 7° ano , relativamente aos temas do programa.

Preferência dos alunos em relação aos temas de estudo



Números e operações
Organização e tratamento de dados
Álgebra
Geometria e medida



Sabendo que cada aluno escolheu apenas um tema, responde a cada uma das questões seguintes:
2.1 Qual é o tema preferido dos alunos?
2.2 Determina a amplitude do ângulo correspondente ao tema “Organização e tratamento de dados”.
2.3 Supondo que estão matriculados 220 alunos no 7° ano , determina o número de alunos que escolheram cada tema.

3. Os dados da tabela abaixo referem-se ao tempo gasto pelos alunos de uma turma no percurso casa-escola.

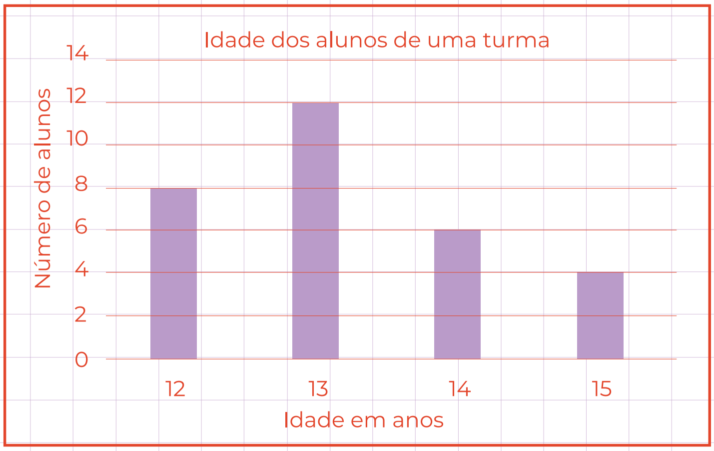
Tempo Gasto em minutos					
48	18	37	10	38	35
35	57	33	17	20	45
16	30	27	25	42	15

3.1 Qual é a diferença entre o maior valor e o menor valor do tempo gasto?
3.2 Organiza os dados numa tabela em intervalos de **10** minutos, começando pelo intervalo **10** a **20** minutos.
3.3 Constrói o histograma de frequências absolutas.
3.4 Qual é a percentagem de alunos que gasta 40 minutos ou mais no percurso casa- escola?

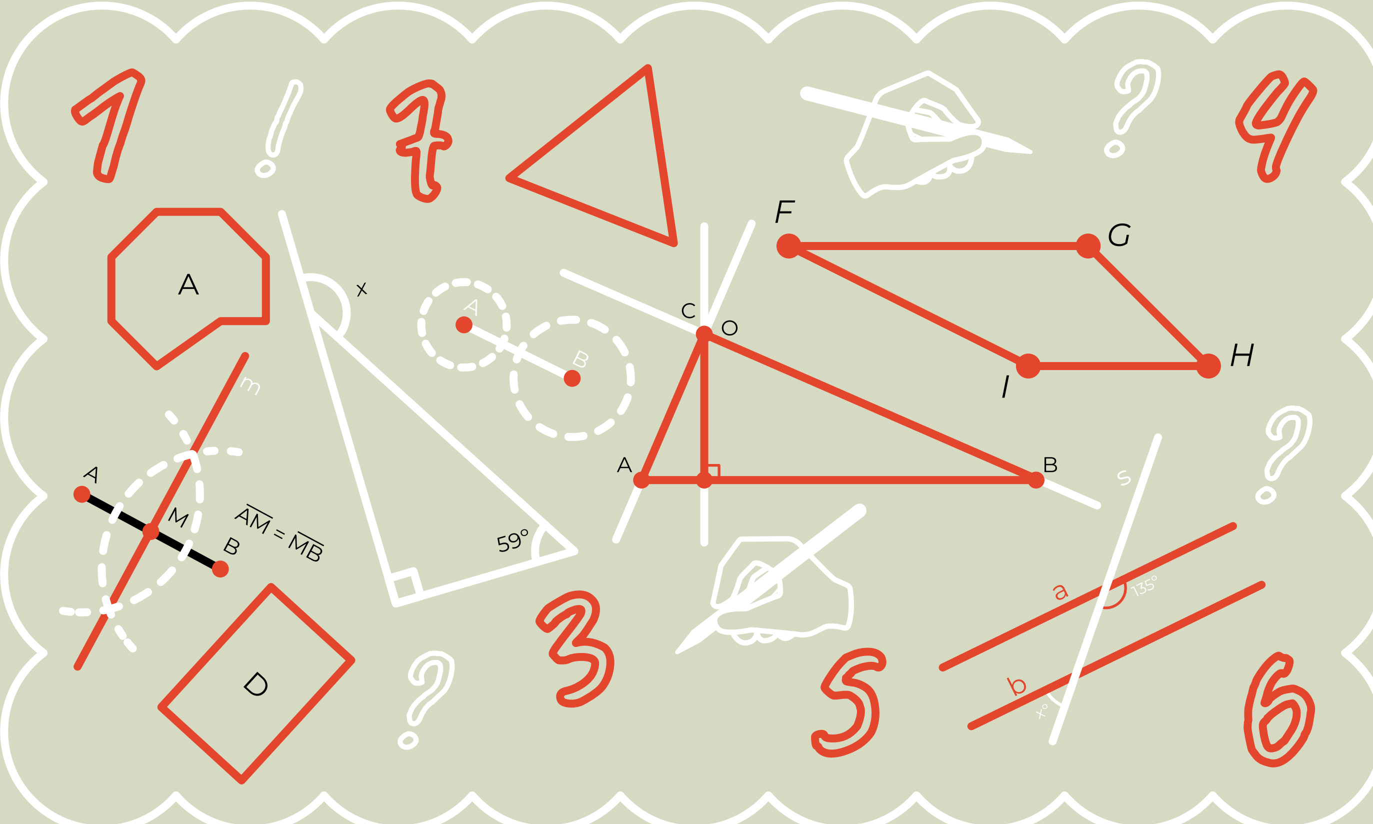
4. Determina a média, a moda e a mediana dos seguintes conjuntos de dados:

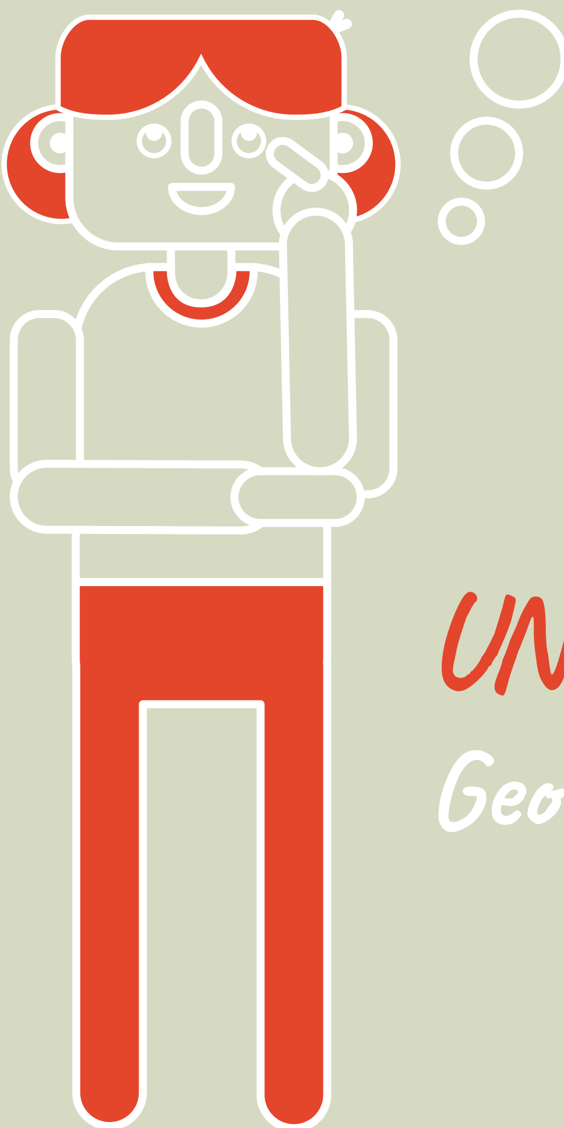
4.1 6 6 7 7 7 8 7 9 8
4.2 10 5 3 10 13 4 2 13 1 13 12 18

5. O gráfico seguinte mostra a distribuição das idades dos alunos de uma turma.



5.1 Representa os dados numa tabela de frequências absolutas, relativas e absolutas acumuladas.
5.2 Quantos alunos tem a turma?
5.3 Determina a média, a mediana e a moda das idades.





UNIDADE 4

Geometria e medida

UNIDADE 4

GEOMETRIA E MEDIDA

CONTEÚDOS:

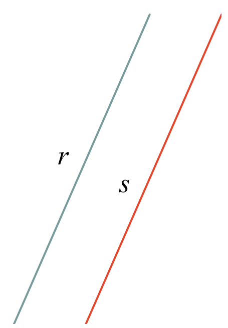
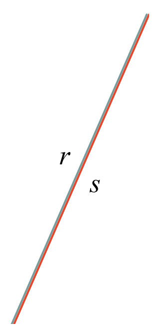
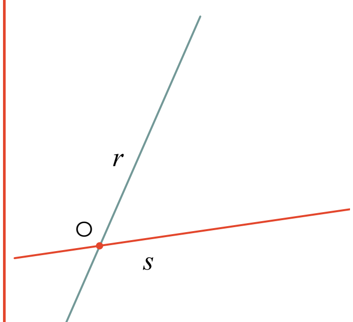
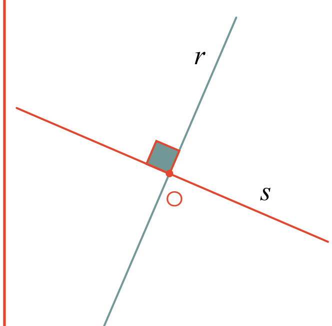
Posição relativa de retas no plano (Revisões)
Ângulos
Polígonos
Triângulos
Elementos de um triângulo
Construção de triângulos
Alturas, medianas, mediatrizes, bissetrizes
Circunferência inscrita e circunferência circunscrita no triângulo
Congruência de triângulos
Critérios de congruência de triângulos
Quadriláteros
Ângulos de um quadriláteros
Classificação de quadriláteros

OBJETIVOS:

- Identificar retas paralelas e perpendiculares entre si, e diferentes tipos de ângulos.
- Justificar a posição relativa de retas no plano, com base nas definições e nas propriedades.
- Construir, com régua e compasso, retas paralelas, perpendiculares, bissetriz de um ângulo e mediatriz de um segmento.
- Identificar e construir ângulos de lados paralelos, verticalmente opostos, complementares e suplementares.
- Identificar linhas poligonais abertas e fechadas.
- Classificar polígonos de acordo com os ângulos, os lados, côncavo e convexo.
- Determinar elementos de um triângulo: lados, ângulos, alturas, bissetrizes e mediatrizes.
- Discutir a possibilidade de construção de um triângulo a partir de elementos dados.
- Construir circunferência inscrita e circunferência circunscrita no triângulo.
- Construir um triângulo congruente ao dado.
- Utilizar os critérios de congruência de triângulos nas demonstrações.
- Aplicar as relações entre lados e ângulos opostos de um triângulo na análise de figuras.
- Identificar quadriláteros e os seus ângulos.
- Construir e classificar quadriláteros.
- Usar as propriedades dos paralelogramos na justificação de raciocínio lógico.
- Discutir estratégias de resolução de um problema e interpretar os resultados.
- Analisar e discutir resultados.
- Resolver problemas, relacionando entre si propriedades das figuras geométricas.
- Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de os usar.

POSIÇÃO RELATIVA DE RETAS NO PLANO

Como já é do teu conhecimento, duas retas no plano podem estar relacionadas, como no quadro seguinte:

Retas no plano			
Paralelas		Concorrentes	
Estritamente paralelas (não têm qualquer ponto em comum)	**Coincidentes** (têm todos os pontos em comum)	**Oblíquas** (têm um ponto em comum e fazem ângulos não retos entre si)	**Perpendiculares** (têm um ponto em comum e fazem ângulos retos entre si)
			

Sendo:

- Paralelas, quando definem a mesma direção;
- Concorrentes (perpendiculares ou oblíquas) quando têm um e um só ponto comum.

No caso em que as retas são concorrentes, os ângulos por elas definidas podem ser:
- Retos - quando a amplitude é igual a 90º ;
- Agudos - quando a amplitude varia entre 0º e 90º ;
- Obtusos - quando a amplitude varia entre 90º e 180º.

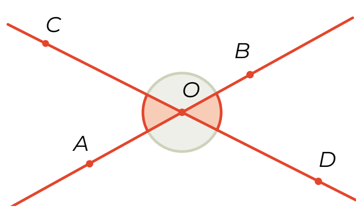
Ainda, quanto à amplitude, os ângulos podem ser classificados em:
- Nulo - quando a amplitude é igual a 0º ;
- Raso - quando a amplitude é igual a 180º ;
- Giro - quando a amplitude é igual a 360º .

Duas retas concorrentes definem ângulos **verticalmente opostos**.

Dois ângulos são verticalmente opostos (opostos pelo vértice) quando têm o mesmo vértice e os lados de um deles estão no prolongamento dos lados do outro.

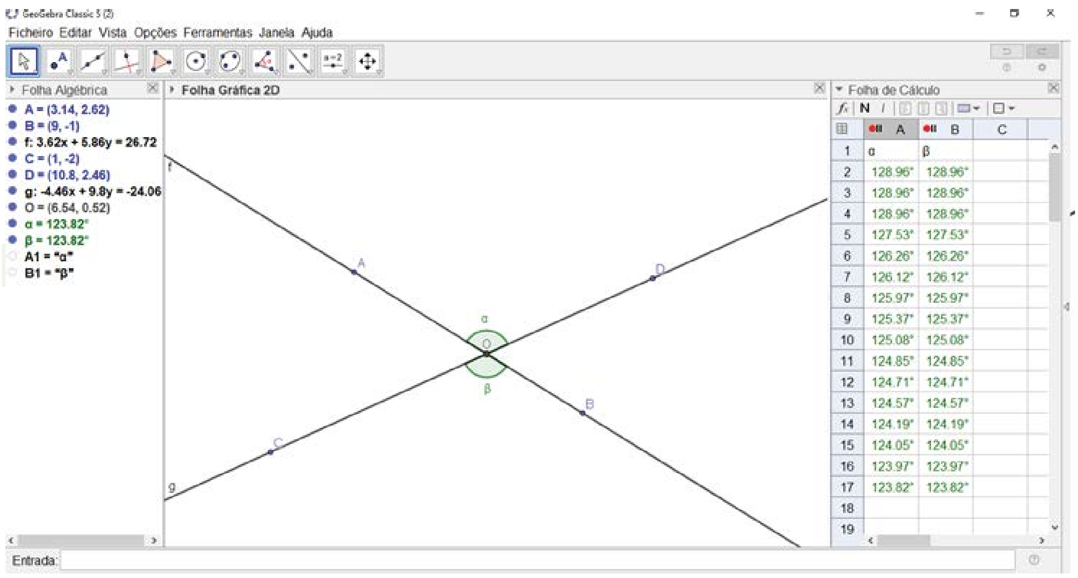
Assim, na figura,

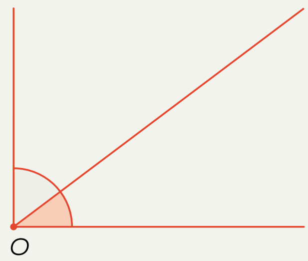
- $\measuredangle AOC$ e $\measuredangle DOB$ são verticalmente opostos.
- $\measuredangle AOD$ e $\measuredangle BOC$ são verticalmente opostos.



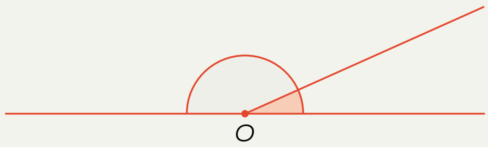
Dois ângulos verticalmente opostos são geometricamente iguais, isto é, têm a mesma amplitude.

Esta propriedade pode ser estudada utilizando o software GeoGebra.





Dois ângulos dizem-se **complementares** quando a soma das suas amplitudes for igual a 90°.



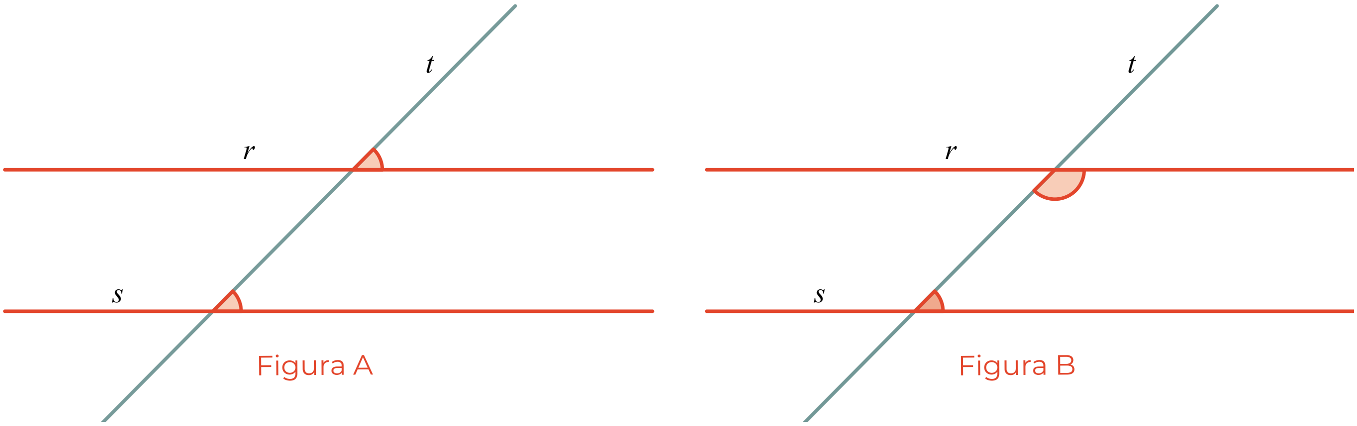
Dois ângulos dizem-se **suplementares** quando a soma das suas amplitudes for igual a 180°.

Os ângulos apresentados na página anterior têm um lado em comum e possuem o mesmo vértice. Por essa razão, dizemos que são ângulos adjacentes.

Dois ângulos dizem-se **adjacentes** quando têm o mesmo vértice e um lado comum.

ÂNGULOS DE LADOS PARALELOS

Consideremos nas figuras A e B, duas retas paralelas, r e s, cortadas por uma reta secante, t .

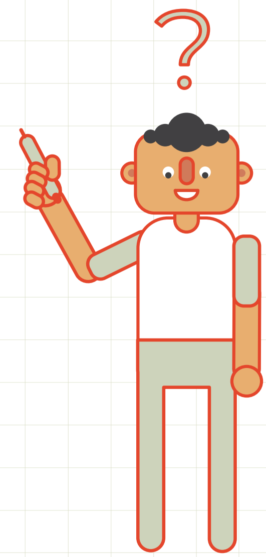


Os lados dos ângulos assinalados em cada uma das figuras pertencem à mesma reta ou a retas paralelas. Por isso, são designados de **ângulos de lados paralelos**.

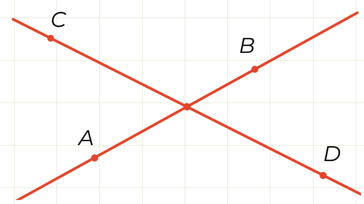
Verifica, com a ajuda do professor, que na figura A, os ângulos indicados são geometricamente iguais e que na figura B, os ângulos indicados são suplementares.

Se dois ângulos têm lados paralelos, ou são geometricamente iguais ou são suplementares.

ATIVIDADES



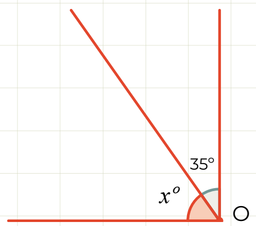
1. A figura ao lado representa duas retas concorrentes oblíquas. Utilizando as letras da mesma, indica:



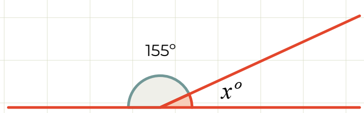
1.1 Dois ângulos adjacentes.
1.2 Dois ângulos verticalmente opostos.
1.3 Dois ângulos suplementares.

2. Para cada uma das situações seguintes, indica a amplitude dos ângulos representados por x^o e y^o .

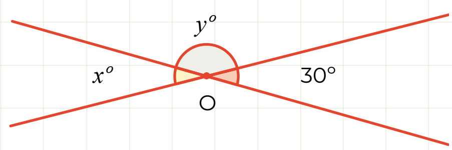
2.1



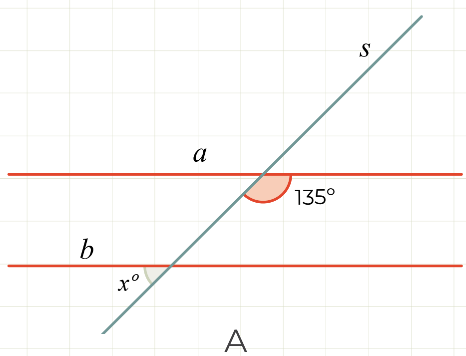
2.2



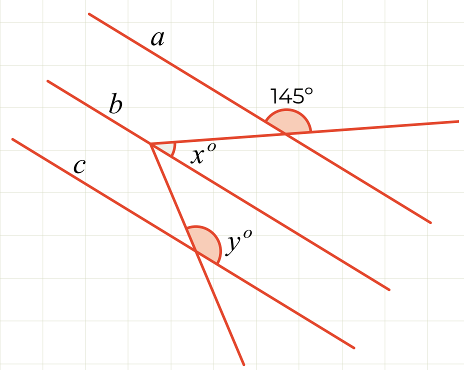
2.3



3. Observa as figuras A e B :



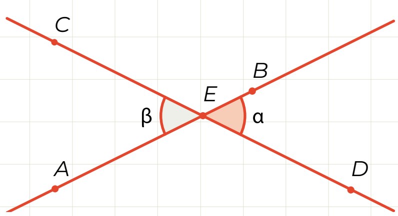
A



B

Determina as amplitudes dos ângulos correspondente a x^o e y^o.

4. Observa a figura e indica as opções corretas.



4.1. Os ângulos α e β dizem-se:
(A) adjacentes;
(B) verticalmente opostos;
(C) complementares;
(D) suplementares.

4.2. Considera que o ângulo α tem amplitude igual a 53°.
Qual é a amplitude do ângulo $\measuredangle AED$? Circula a opção correcta.
(A) 120° (B) 150° (C) 127° (D) 233°

POLÍGONOS

LINHAS POLIGONAIS ABERTAS E FECHADAS

Considera a reta r e nela definidos os segmentos de reta [*AC*], [*DE*] e [*EB*].

Como esses segmentos pertencem todos à mesma reta, dizemos que são **colineares**.

Na figura I, a extremidade *G* do segmento de reta [*FG*] coincide com a extremidade *G* do segmento de reta [*GH*]. Por isso, os segmentos de reta [*FG*] e [*GH*] dizem-se consecutivos e definem uma linha poligonal.

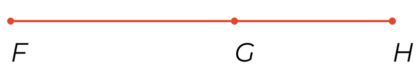


Figura I

As extremidades *F* e *H* dizem-se extremidades da linha poligonal definida pelos segmentos de reta [*FG*] e [*GH*].

Na figura II, consideremos 3 segmentos de reta consecutivos [*FG*], [*GH*] e [*HI*]. Eles definem uma linha poligonal com extremidades *F* e *I*.

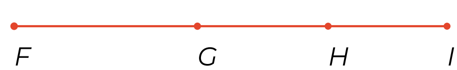


Figura II

Na figura III, estão representados 4 segmentos de reta consecutivos [*FG*], [*GH*], [*HI*] e [*IF*]. Eles definem uma linha poligonal sem extremidades.

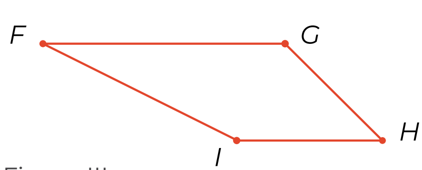
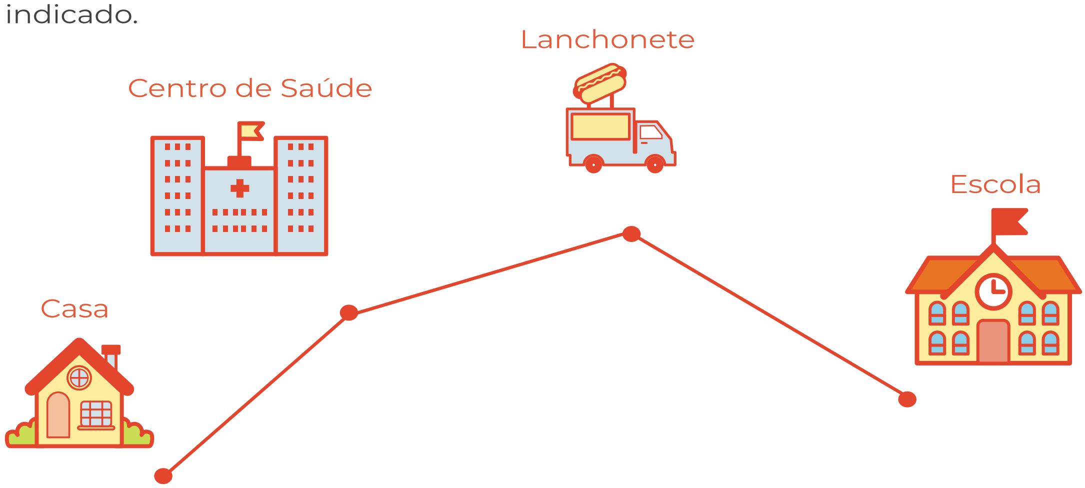


Figura III

Uma linha poligonal diz-se **aberta** se tem extremidades e diz-se **fechada** se não tem extremidades.

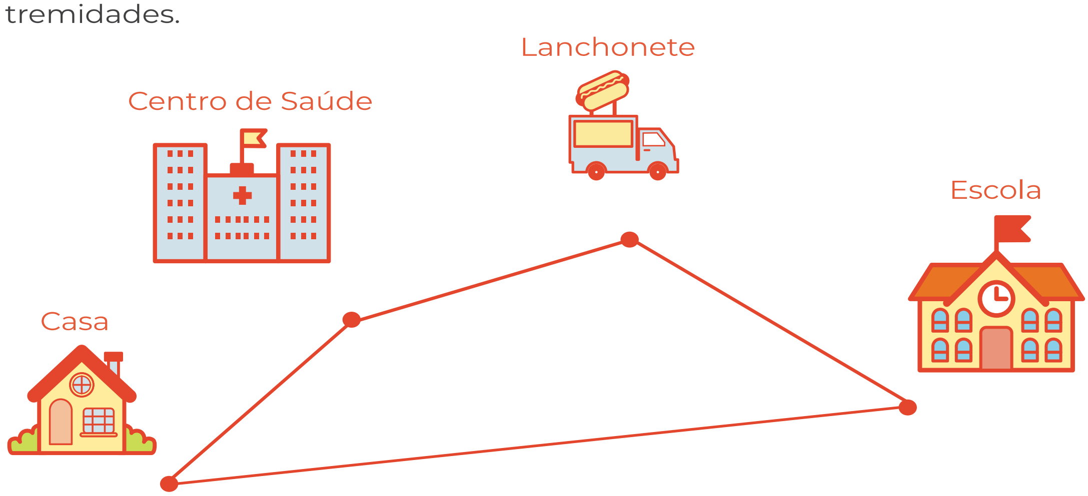
Considera a situação:

A Paula deslocou-se ao centro de saúde da sua comunidade para fazer um exame médico, depois resolveu parar numa lanchonete para tomar o pequeno almoço antes de seguir para a escola, conforme o percurso indicado.



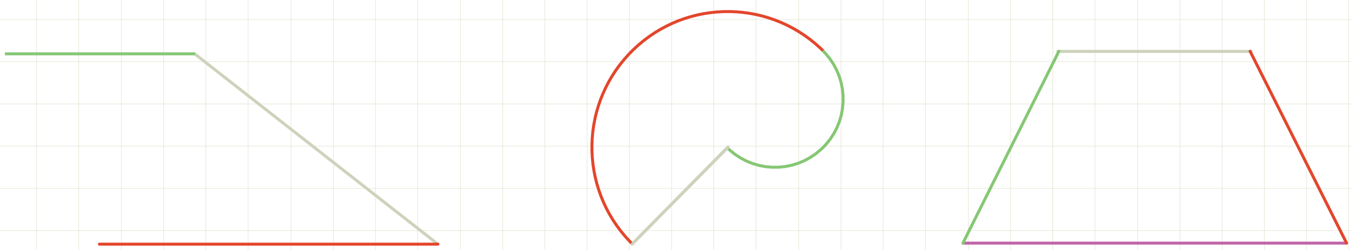
O trajeto utilizado pela Paula representa uma linha poligonal com extremidades; Casa (ponto de partida) e Escola (ponto de chegada).
Trata-se de uma linha poligonal aberta.

Ao regressar, se o trajeto for direto Escola - Casa, como mostra a figura, o percurso completo definiria uma linha poligonal fechada, isto é, sem extremidades.

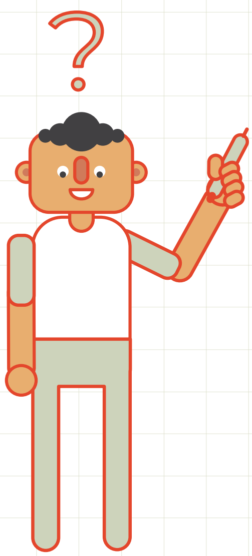


ATIVIDADES

1. Observa as seguintes figuras:



I II III



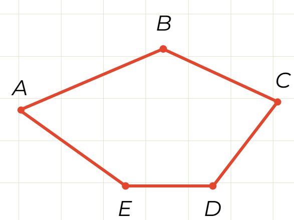
Identifica:

1.1 As linhas poligonais.

1.2 A linha poligonal aberta.

1.3 A linha poligonal fechada.

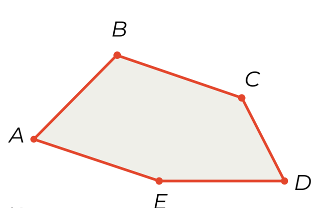
2. Classifica a linha poligonal representada na figura que se segue.



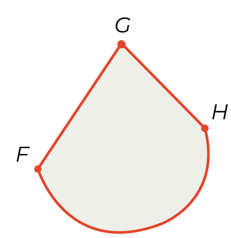
POLÍGONOS

Num plano, um **polígono** é a reunião de uma linha poligonal fechada com a sua região interior. Os segmentos de reta que formam a linha poligonal são os **lados do polígono** e as extremidades desses segmentos são os **vértices do polígono**.

Exemplos



polígono



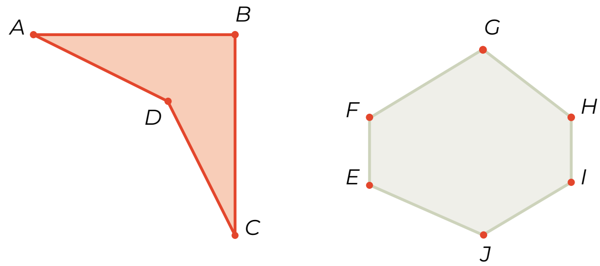
não polígono

A figura representa um polígono e um não polígono.

Os vértices do polígono são os pontos: A, B, C, D e E e os lados do polígono são os segmentos de reta $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$ e $[EA]$.

Os polígonos podem ser côncavos ou convexos, como podes observar nas figuras seguintes.

Côncavo Convexo



Um polígono é **não convexo** (ou **côncavo**) se pelo menos dois dos seus pontos definem um segmento de reta que não está contido no polígono.

Um polígono é **convexo** se dois dos seus pontos, quaisquer, definem um segmento de reta que está contido no polígono.

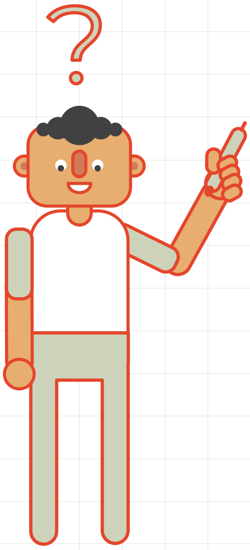
Recorda que os polígonos podem ser classificados de acordo com o número de lados e com os seus ângulos.

No quadro abaixo, podes recordar a classificação de polígonos, segundo o número de lados:

Polígono							
Número de lados	3	4	5	6	7	8	9
Nome	Trilátero ou triângulo	Quadrilátero	Pentágono	Hexágono	Heptágono	Octógono	Eneágono

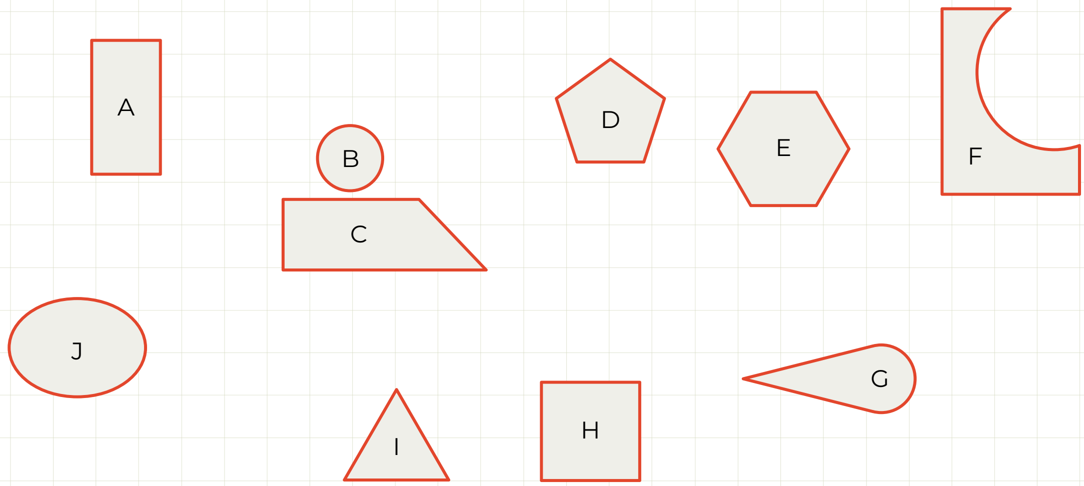
Se os lados forem todos geometricamente iguais, isto é, com o mesmo comprimento, e os ângulos também forem geometricamente iguais (isto é, com a mesma amplitude), então diz-se que o **polígono é regular**.

No caso contrário, o polígono diz-se **irregular**.



ATIVIDADES

1. Considera as figuras planas representadas abaixo:



1.1 Utilizando as letras que as identificam, indica:

1.1.1 os polígonos;

1.1.2 os quadriláteros;

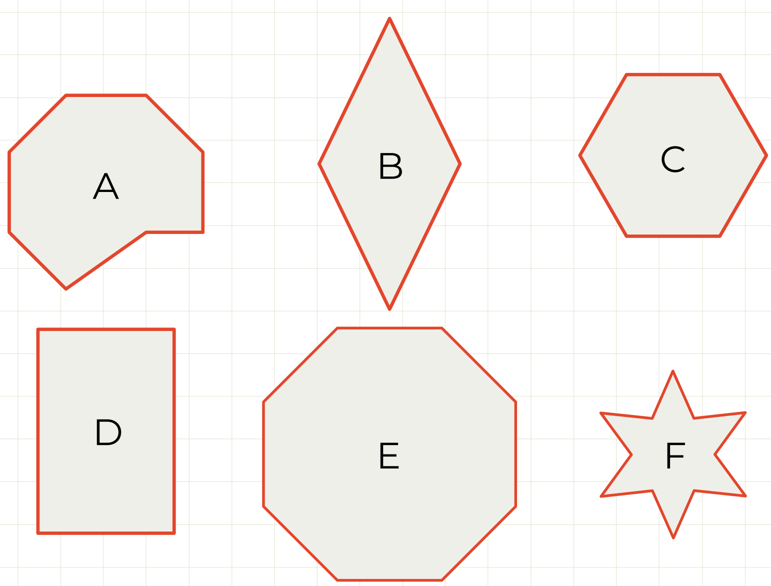
1.1.3 os polígonos regulares;

1.2 Comenta a afirmação: "Nenhum dos polígonos é um octógono".

2. Dos polígonos representados na figura abaixo, indica:

2.1 Os polígonos convexos e os polígonos não convexos.

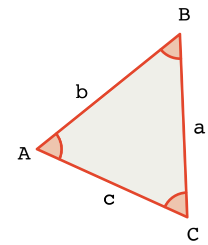
2.2 Os polígonos regulares.



TRIÂNGULOS

Recorda que um triângulo ou trilátero é um polígono com:

- três lados;
- três ângulos;
- três vértices.

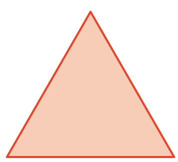


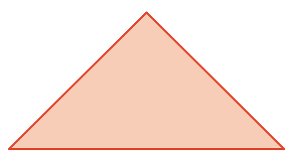
ATIVIDADE

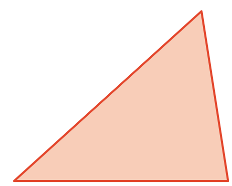
Na figura acima, identifica os lados, os ângulos e os vértices do triângulo.

CLASSIFICAÇÃO DE TRIÂNGULOS

Quanto aos lados, um triângulo pode ser classificado em:

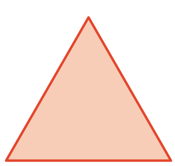

Triângulo Equilátero

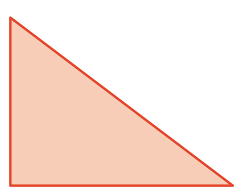

Triângulo Isósceles

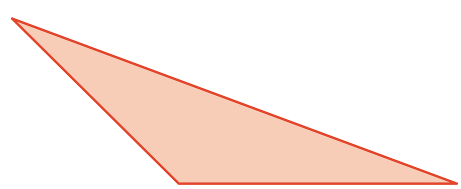

Triângulo Escaleno

- **Equilátero** quando tem três lados geometricamente iguais;
- **Isósceles** quando tem dois lados geometricamente iguais;
- **Escaleno** quando tem três lados geometricamente diferentes.

Quanto aos ângulos, um triângulo pode ser classificado em:


Triângulo acutângulo

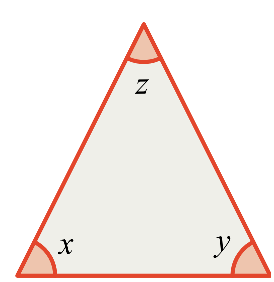

Triângulo retângulo


Triângulo obtusângulo

- **Acutângulo** quando tem três ângulos agudos;
- **Retângulo** quando tem um ângulo reto;
- **Obtusângulo** quando tem um ângulo obtuso.

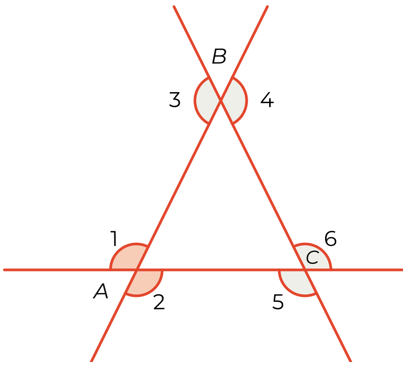
ÂNGULOS DE UM TRIÂNGULO

Um triângulo tem três ângulos internos.
Na figura, os ângulos assinalados (x, y e z), são os ângulos internos do triângulo.



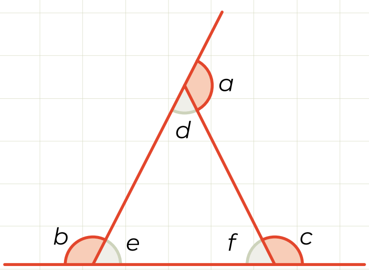
ÂNGULOS EXTERNOS DE UM TRIÂNGULO

Um **ângulo externo** de um triângulo é um ângulo adjacente a um dos ângulos internos desse triângulo.

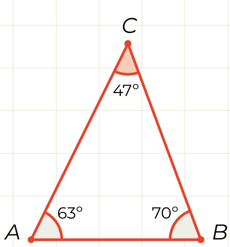


Um triângulo tem seis ângulos externos, sendo geometricamente iguais dois a dois (por serem verticalmente opostos dois a dois). Na figura, os ângulos externos estão identificados pelos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

ATIVIDADE



Identifica os ângulos externos do triângulo representado na figura ao lado.



Observação: quando se diz, simplesmente, "ângulos de um triângulo", refere-se aos ângulos internos.
Observa a figura ao lado. Repara que:

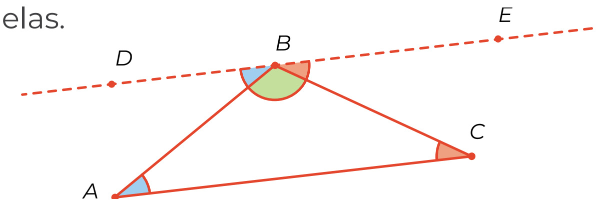
$\hat{A} = 63°$; $\hat{B} = 70°$ e $\hat{C} = 47°$ logo:
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

ATIVIDADE

Desenha no teu caderno um triângulo [*ABC*] qualquer. Com ajuda de um transferidor mede a amplitude de cada um dos ângulos internos do triângulo e calcula a soma dessas amplitudes. Que concluis?
Verificamos que:

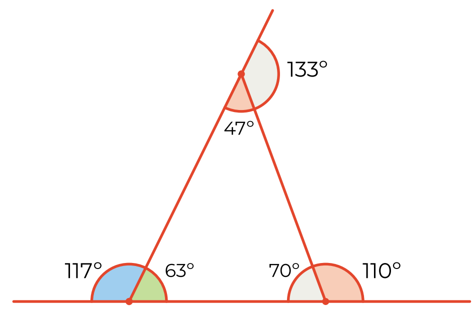
A soma das amplitudes dos **ângulos internos** de um triângulo é **180º**.

Considera o triângulo [ABC] e as retas AC e DE paralelas.
Sabendo que $D\hat{B}A = B\hat{A}C$
$E\hat{B}C = B\hat{C}A$ (por serem ângulos de lados paralelos)



temos: $B\hat{A}C + A\hat{B}C + B\hat{C}A = D\hat{B}A + A\hat{B}C + E\hat{B}C = 180°$
Esta propriedade pode ser verificada, utilizando o software GeoGebra.

Considera a figura ao lado:



Atendendo aos ângulos externos representados e as respetivas amplitudes, verificamos que:

- 117° = 70° + 47°
- 133° = 70° + 63°
- 110° = 63° + 47°

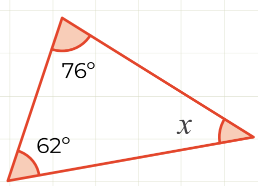
Ou seja:

A amplitude de um **ângulo externo** de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

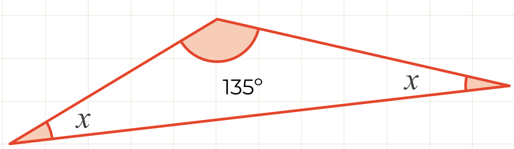
ATIVIDADES

1. Determina a amplitude em graus do ângulo x, em cada uma das situações seguintes, e classifica quanto aos ângulos cada um dos triângulos.

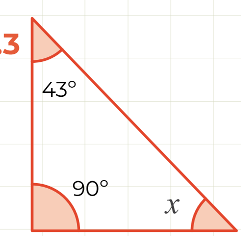
1.1



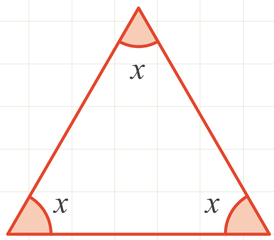
1.2.



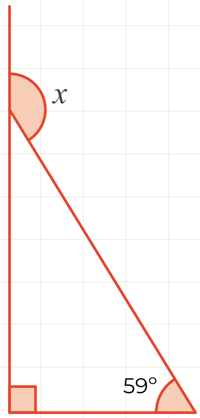
1.3



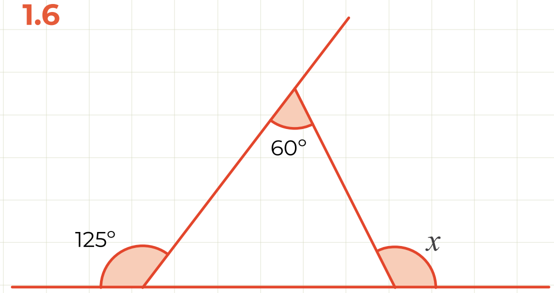
1.4

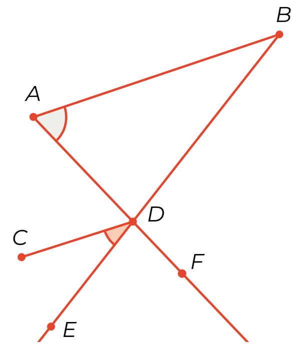


1.5



1.6





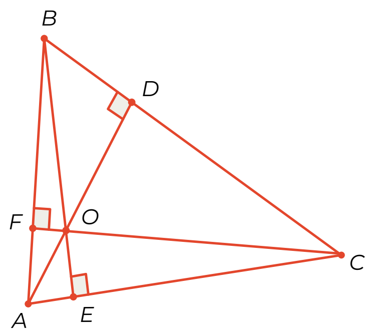
2. Na figura, *AB* e *CD* são paralelas.

2.1 Utilizando as letras da figura, indica um ângulo externo do triângulo $[ABD]$.

2.2 Sabendo que $D\hat{A}B = 62°$ e $C\hat{D}E = 33°$, determina $A\hat{B}D$ e $E\hat{D}F$.

2.3 Classifica, quanto aos ângulos, o triângulo $[ABD]$.

OUTROS ELEMENTOS DE UM TRIÂNGULO



Considera o triângulo $[ABC]$ e nele os segmentos de reta perpendiculares traçados de cada um dos vértices para o lado oposto. A cada um desses segmentos chamamos **altura do triângulo**.

A altura de um triângulo em relação a um lado é o comprimento do segmento de reta perpendicular, traçado do vértice oposto a esse lado ou ao seu prolongamento.

Todo o triângulo tem três alturas.
As três alturas intersetam-se no ponto O . A esse ponto chama-se **Ortocentro** do triângulo.
As figuras mostram que o ortocentro pode ser um ponto interior ao triângulo (figura A) , exterior ao triângulo (figura B) ou sobre um lado do triângulo (figura C) .

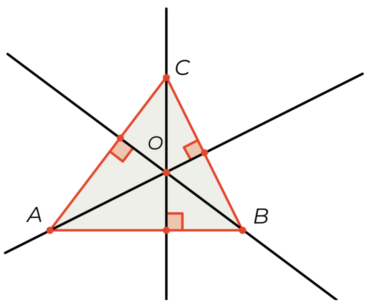


Figura A

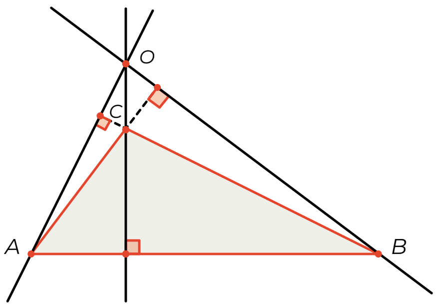


Figura B

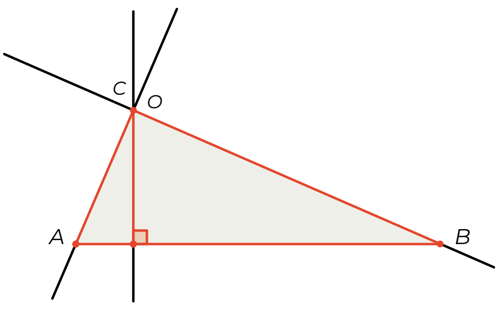
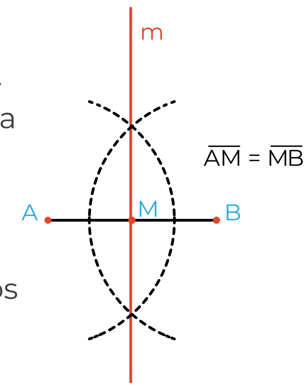
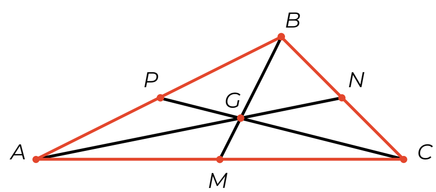


Figura C

Observa a figura ao lado, em que:
$\overline{AM} = \overline{MB}$ e a reta m é perpendicular ao segmento de reta [*AB*] no ponto *M*.
O ponto *M* é designado por ponto **médio do segmento** de reta [*AB*] e a reta m é a **mediatriz** desse segmento.

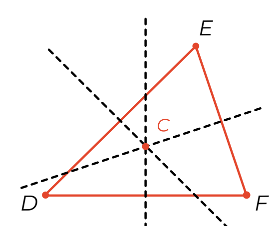


Considera o triângulo [*ABC*] da figura abaixo.
Sendo *M*, *N* e *P* os pontos médios dos lados do triângulo, aos segmentos de reta [*BM*], [*NA*] e [*PC*] damos o nome de **medianas** do triângulo.

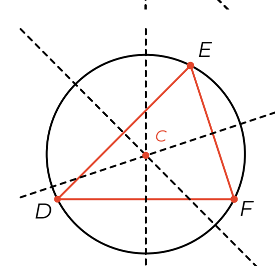


Mediana de um triângulo é um segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

Todo o triângulo tem três medianas. Ao ponto de interseção das medianas, (**G**) damos o nome de **Baricentro** do triângulo.
Num triângulo qualquer, para além das medianas, podemos também traçar as mediatrizes de cada um dos lados, como se pode verificar na figura. Essas mediatrizes intersetam-se no ponto *C*.
Ao ponto de interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo damos o nome de **Circuncentro** do triângulo, que se representa por (**C**) .

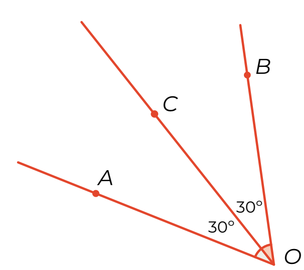


Relativamente à figura anterior, podemos traçar uma circunferência de centro em *C* e que passa pelos vértices *D*, *E* e *F* do triângulo.
Esta circunferência designa-se por **circunferência circunscrita ao triângulo**.

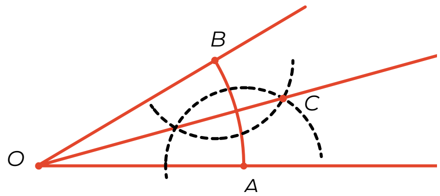


BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

Observa a figura ao lado.
$A\hat{O}C = C\hat{O}B = 30°$
Verifica-se que a semirreta $\dot{O}C$ divide o ângulo *AOB* em dois ângulos geometricamente iguais. Neste caso, a semirreta $\dot{O}C$ é denominada **bissetriz** do ângulo *AOB*.

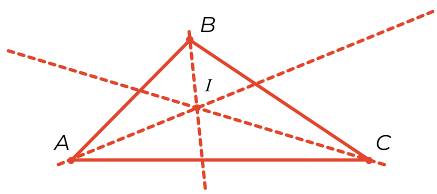


Bissetriz de um ângulo é a semirreta com origem no vértice desse ângulo e que o divide em dois ângulos geometricamente iguais.



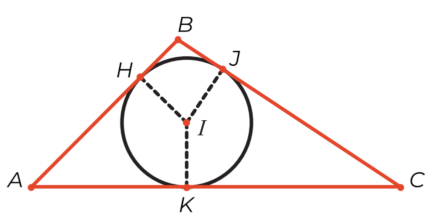
CONSTRUÇÃO DA BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

- Sobre um dos lados do ângulo, considerar um ponto *A*, não coincidente com o vértice *O*. Com centro em O e abertura igual a $\overline{OA}$, traçar o arco *AB*, sendo *B* o ponto de interseção desse arco com o outro lado do ângulo.
- Com centro em *A* e abertura maior que metade do comprimento do arco *AB*, traçar um arco no interior do ângulo; com centro em *B* e mesma abertura, traçar outro arco que interseta o arco anterior num ponto *C*;
- Traçar a semirreta $\dot{O}C$
- A semirreta $\dot{O}C$ é bissetriz do ângulo *AOB*.



Exemplo

Considerando agora os ângulos internos de um triângulo, determina as bissetrizes de cada um deles. O que concluis? Certamente verificaste que as três bissetrizes intersetam-se num ponto. A esse ponto chama-se o **Incentro** do triângulo.



A partir do incentro, traçamos os segmentos de reta perpendiculares a cada um dos lados do triângulo [*ABC*]. Estes intersetam os lados nos pontos *H*, *J* e *K*, como mostra a figura ao lado.

A circunferência de centro *I*, e que passa pelos pontos *H*, *J* e *K*, designa-se por circunferência inscrita no triângulo [*ABC*].

CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULOS

Nos anos anteriores aprendeste a construir um triângulo conhecendo alguns dos seus elementos, como por exemplo:

- o comprimento dos três lados;
- o comprimento de dois lados e a amplitude do ângulo por eles formado;
- o comprimento de um lado e as amplitudes dos ângulos adjacentes a esse lado.

Exemplos:

1. Verifica se é possível construir triângulos com as seguintes medidas para cada um dos lados:

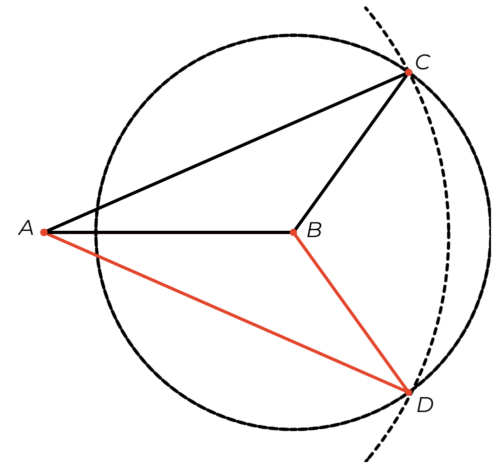
1.1 5 *cm*; 8 *cm*; 4 cm **1.2** 3 *cm*; 4 *cm*; 7 *cm*

1.3 2 *cm*; 4 *cm*; 1 cm **1.4** 3 *cm*; 1,5 *cm*; 1 *cm*

2. Qual a relação que deve existir entre as medidas dos lados para que seja possível construir um triângulo?

Resolução:

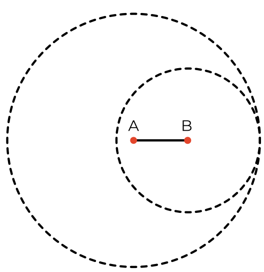
1.1 Comecemos por desenhar um segmento de reta [*AB*] de comprimento igual a 5 *cm*.



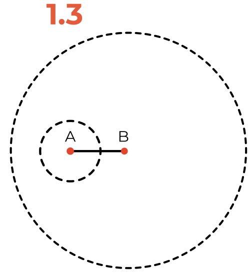
De seguida, com centro num dos extremos, traçar uma circunferência de raio 8 *cm*, e com centro no outro extremo, uma outra circunferência de raio 4 *cm*. As duas circunferências intersetam-se em dois pontos distintos, C e *D*. Os pontos *A*, *B* e *C* definem o triângulo [*ABC*]. Os pontos A, B e D definem o triângulo [*ABD*].

Como podes verificar, o problema apresenta duas soluções.
Procedendo-se da mesma forma, nas questões seguintes, obtemos as figuras abaixo:

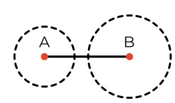
1.2



1.3



1.4



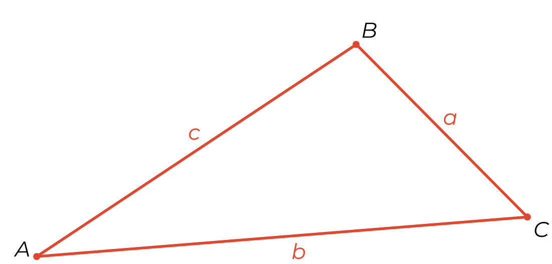
Em qualquer dos casos, como se pode verificar, pelas construções não é possível construir um triângulo.

2. Para construir um triângulo, conhecidas as medidas dos três lados, é preciso que a medida de qualquer lado seja menor que a soma das medidas dos outros dois lados.
A relação verificada no número 2 designa-se por **desigualdade triangular**.

Num triângulo, a medida do comprimento de qualquer lado é menor que a soma das medidas dos comprimentos dos outros dois lados.

Considerando um triângulo [*ABC*] , sendo *a*, *b* e *c* as medidas dos comprimentos dos lados, temos:

$a < b + c$
$b < a + c$
$c < a + b$

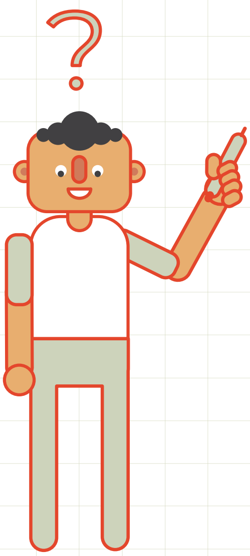


ATIVIDADES DE CONSOLIDAÇÃO

1. Constrói, caso seja possível, o triângulo [*ABC*] , sabendo que:

1.1 $\overline{AB} = 2$ cm ; $\overline{AC} = 7\ cm$ e $\overline{BC} = 4\ cm$. **1.2** $\overline{AB} = 3\ cm$; $\overline{AC} = 9\ cm$ e $\overline{BC} = 6\ cm$.

1.3 $\overline{AB} = 2$ cm ; $\overline{AC} = 13\ cm$ e $\overline{BC} = 14\ cm$. **1.4** $\overline{AB} = 4\ cm$; $\overline{AC} = 90\ mm$ e $\overline{BC} = 0{,}6\ dm$.



2. No triângulo [*MNP*] sabe-se que $\overline{MN} = 3{,}2\ cm$ e $\overline{NP} = 4{,}3\ cm$.
Entre que valores pode variar a medida do comprimento de MP ?

3. Constrói, caso seja possível, cada um dos triângulos:

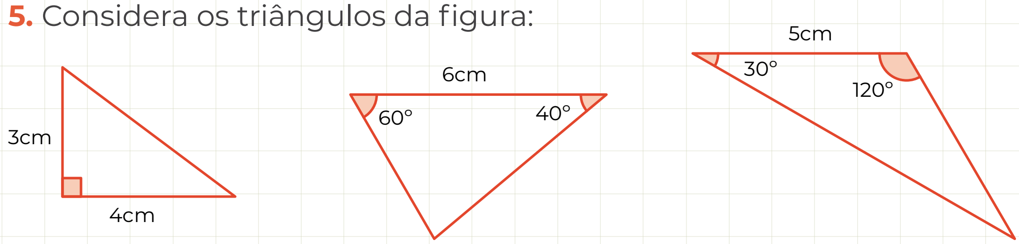
3.1 Dois lados de 8 cm cada; o ângulo formado por esses lados é igual a 45º .

3.2 Dois lados de 6 e 8 cm cada; um ângulo, adjacente a um desses lados, com amplitude igual a 60º.

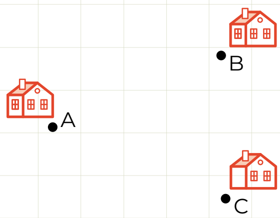
3.3 Dois ângulos de 60º e um lado, adjacente a ambos com comprimento igual a 8cm.

4. Constrói um triângulo equilátero [*ABC*] com 3 *cm* de lado e determina o incentro, o ortocentro e o baricentro desse triângulo. A que conclusão chegaste?

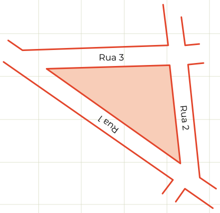
5. Considera os triângulos da figura:



Copia-os para o teu caderno e, para cada um deles marca o circuncentro, desenhando de seguida a circunferência circunscrita ao triângulo.
Faz um pequeno relatório sobre a posição do circuncentro relativamente a cada um dos triângulos.
Faz o mesmo exercício em relação ao incentro e à circunferência inscrita.



6. Três amigos moram numa região como mostra a figura ao lado. Eles desejam plantar uma árvore de modo que esta fique à mesma distância das três casas. Sabendo que a localidade é plana, com os teus conhecimentos da geometria, que sugestão poderias dar a esses amigos? Justifica o teu raciocínio.

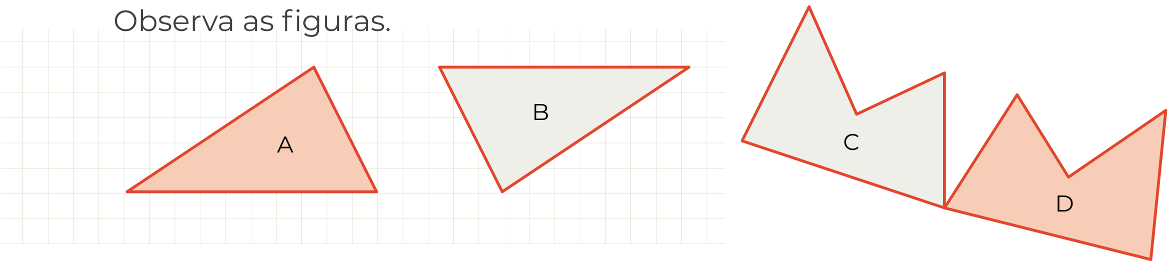


7. Uma estátua em homenagem a um morador de uma cidade vai ser colocada na praça principal. Descobre, na planta ao lado, o local em que ela deve ficar, sabendo que a sua distância às três ruas que delimitam a praça será a mesma.

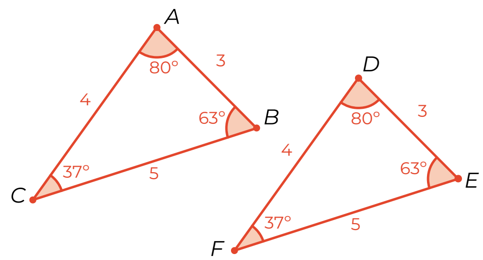
CRITÉRIOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Duas figuras geométricas planas são **geometricamente iguais** ou **congruentes** se tiverem as mesmas propriedades geométricas, isto é, os elementos correspondentes tiverem as mesmas medidas (os segmentos de reta têm os mesmos comprimentos, os ângulos têm as mesmas amplitudes e as duas figuras têm a mesma medida de área). Por isso, na prática, elas são sobreponíveis.

Observa as figuras.

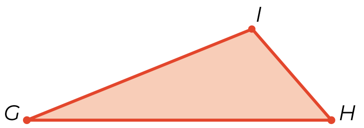


As figuras A e B, estão em posições diferentes, mas são sobreponíveis. O mesmo acontece com as figuras C e D.

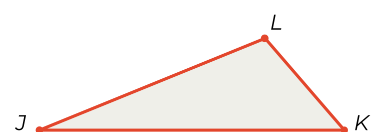


Consideremos os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$.
Sendo:
$\overline{AB} = \overline{DE}$ $\quad \hat{A} = \hat{D}$
$\overline{BC} = \overline{EF}$ $\quad \hat{B} = \hat{E}$
$\overline{AC} = \overline{DF}$ $\quad \hat{C} = \hat{F}$
os dois triângulos são sobreponíveis, isto é, são congruentes.
Para verificar se dois triângulos são congruentes basta verificar três medidas: vamos ver quais são.

1. AS MEDIDAS DE COMPRIMENTO DOS TRÊS LADOS

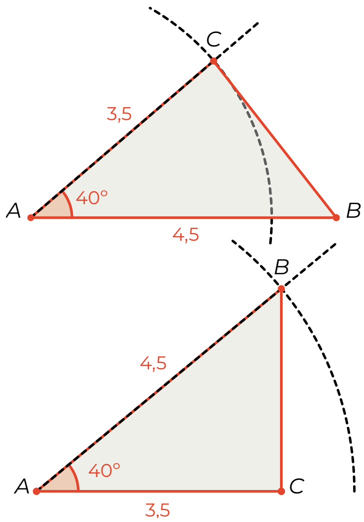


Desenha dois triângulos, $[GHI]$ e $[JKL]$, sabendo que:
$\overline{GH} = 5\ cm$, $\overline{HI} = 4\ cm$ e $\overline{GI} = 2\ cm$
$\overline{JK} = 5\ cm$, $\overline{KL} = 4\ cm$ e $\overline{JL} = 2\ cm$



Medindo a amplitude dos ângulos de cada triângulo, temos:
$\hat{G} = 22°$, $\hat{H} = 50°$ e $\hat{I} = 108°$
$\hat{J} = 22°$, $\hat{K} = 50°$ e $\hat{L} = 108°$
Verificamos que os triângulos $[GHI]$ e $[JKL]$ são congruentes porque têm os lados congruentes e os ângulos também congruentes.
Podemos então afirmar o critério ***LLL*** de congruência de triângulos:

Dois triângulos são **congruentes** se e só se os lados correspondentes forem congruentes.



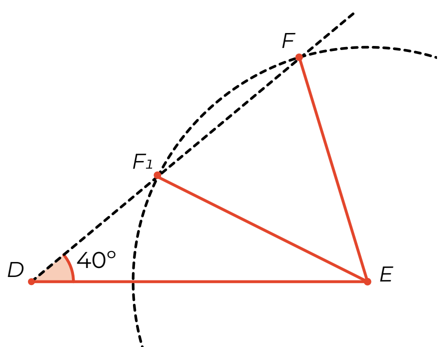
2. AS MEDIDAS DE COMPRIMENTO DE DOIS LADOS E A AMPLITUDE DO ÂNGULO POR ELES FORMADO

Vamos construir um triângulo [*ABC*] em que:
$\overline{AB} = 4{,}5\ cm$, $\overline{AC} = 3{,}5\ cm$ e $\hat{A} = 40°$

Poderíamos ter obtido um triângulo, noutra posição, como na figura ao lado, por exemplo, mas geometricamente igual ao desenhado anteriormente, como podemos verificar, medindo os lados correspondentes e os ângulos correspondentes.

Podemos então afirmar o critério ***LAL*** de congruência de triângulos:

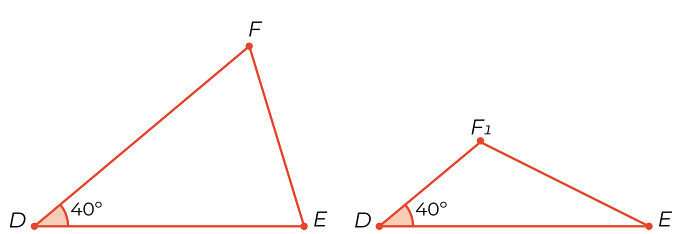
Dois triângulos são **congruentes** se tiverem dois lados correspondentes congruentes e o ângulo por eles formado também congruente.



Observa que, se o ângulo congruente nos dois triângulos não for o ângulo formado pelos dois lados não podemos ter a certeza se os triângulos são geometricamente iguais.
Por exemplo, vamos agora desenhar um triângulo [*DEF*], sabendo que:
$\overline{DE} = 5\ cm$, $\overline{EF} = 3{,}5\ cm$ e $\hat{D} = 40°$

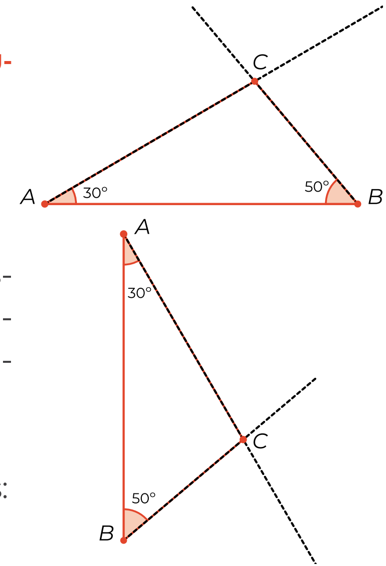
Traçamos o lado [*DE*] e com o transferidor marcamos o $\measuredangle D$; com o compasso traçamos um arco de circunferência com centro no ponto E e de raio 3,5 *cm*.
O arco interseta um dos lados do ângulo $\measuredangle D$ em dois pontos distintos F_1 e *F*.

Obtemos assim dois triângulos nas condições do problema.



Com podemos observar, esses dois triângulos não são congruentes.

3. A MEDIDA DE COMPRIMENTO DE UM LADO E A AMPLITUDE DOS DOIS ÂNGULOS A ELE ADJACENTES

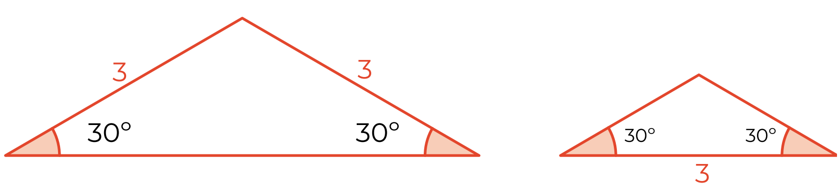


Consideremos o triângulo [*ABC*] em que:
$\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 50^\circ$ e $\overline{AB} = 6\ cm$
Para contruir o triângulo, começamos por traçar [*AB*] . Com o transferidor marcamos os ângulos *A* e *B*, de seguida prolongamos os lados dos ângulos desenhados, de modo a definir o ponto de interseção *C*.

Podemos então afirmar o critério ***ALA*** de congruência de triângulos:

Dois triângulos são **congruentes** se tiverem um lado correspondente congruente e os dois ângulos adjacentes a esse lado também congruentes.

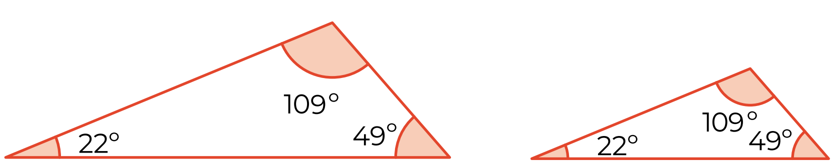
Observa que, se o lado cujo comprimento é conhecido não fosse adjacente aos ângulos também conhecidos, podíamos **não** obter triângulos geometricamente iguais.
Por exemplo, desenhemos um triângulo isósceles sabendo que um lado tem de comprimento 3cm e dois ângulos de amplitude 30° .
Temos duas soluções para o problema:



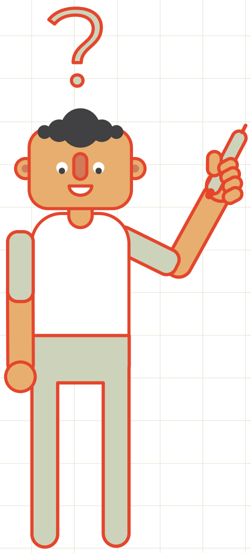
Como podemos observar, esses dois triângulos não são congruentes.

Observação

Observa que dois triângulos cujos ângulos correspondentes são congruentes podem não ser congruentes, como se pode ver na figura abaixo.



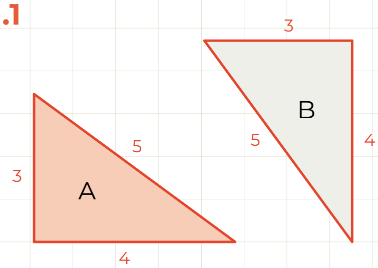
Por isso não existe um critério ***AAA***.



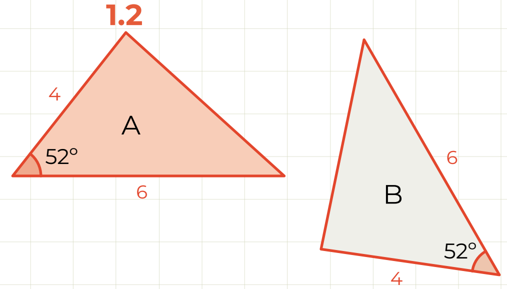
ATIVIDADES

1. Diz, justificando para cada caso, se os triângulos A e B são ou não congruentes.

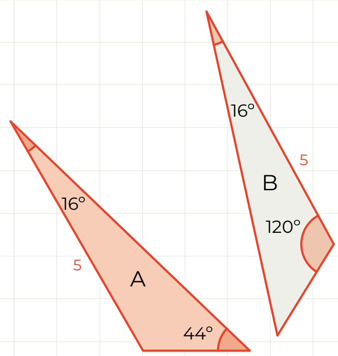
1.1



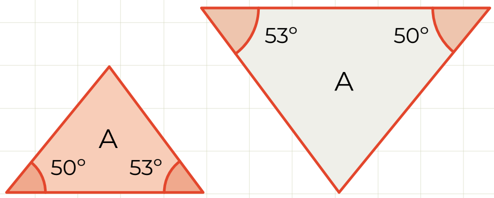
1.2



1.3.

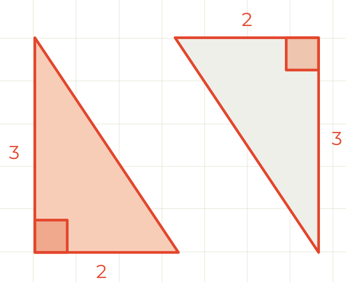


1.4

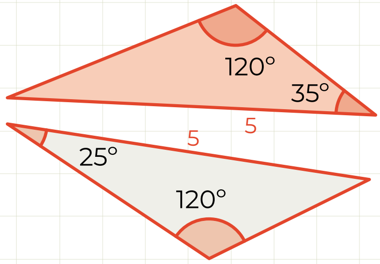


2. Enuncia o critério que justifica a congruência entre os pares de triângulos seguintes:

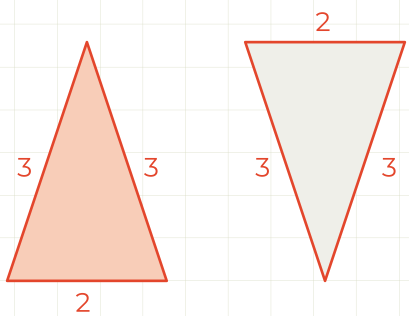
2.1



2.2



2.3



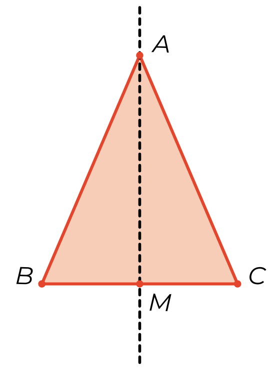
3. Constrói um triângulo retângulo em que a hipotenusa mede 3,5 *cm* e um dos catetos mede 3 *cm*.
Quantas soluções tem o problema?

RELAÇÃO ENTRE LADOS E ÂNGULOS DE UM TRIÂNGULO

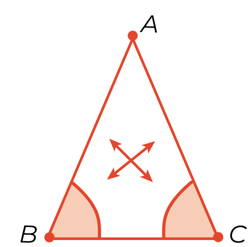
Como já sabes classificar um triângulo quanto aos lados, vamos desenhar um triângulo isósceles [*ABC*], em que $\overline{AB} = \overline{AC}$, e de seguida traçar a mediatriz relativamente ao lado [*BC*] .

Repara que o triângulo ficou dividido em dois triângulos geometricamente iguais, [*ABM*] e [*AMC*] , segundo o critério de congruência de triângulos ***LLL***. Também o triângulo [*AMC*] é imagem do triângulo [*AMB*] pela reflexão relativamente à reta *AM*.

A reta *AM* é o eixo de simetria do triângulo [*ABC*].



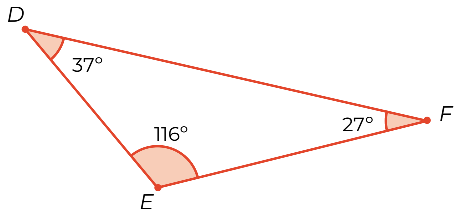
Partimos de um triângulo com dois lados geometricamente iguais e verificamos que também tem dois ângulos geometricamente iguais. Os ângulos geometricamente iguais são os opostos aos lados geometricamente iguais.



Num triângulo, a lados geometricamente iguais opõem-se ângulos geometricamente iguais e a ângulos geometricamente iguais opõem-se lados geometricamente iguais.

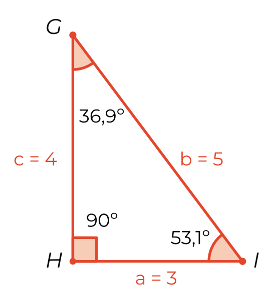
ENTÃO:

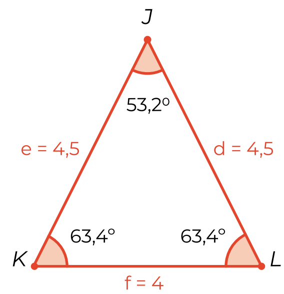
- Se um triângulo tem três lados geometricamente iguais, tem três ângulos geometricamente iguais; se um triângulo tem três ângulos geometricamente iguais, tem três lados geometricamente iguais;
- Se um triângulo tem dois lados geometricamente iguais, tem dois ângulos geometricamente iguais; se um triângulo tem dois ângulos geometricamente iguais, tem dois lados geometricamente iguais.
- Se um triângulo tem três lados diferentes, tem três ângulos diferentes; se um triângulo tem três ângulos diferentes, tem três lados diferentes.



Considera agora um triângulo escaleno [*DEF*].
Por observação verifica-se que: ao maior lado opõe-se o maior ângulo e ao menor lado opõe-se o menor ângulo.

E nos triângulos [*GHI*] e [*JKL*] a seguir indicados, que concluis?





Num triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo e ao menor lado opõe-se o menor ângulo.

Num triângulo, ao maior ângulo opõe-se o maior lado e ao menor ângulo opõe-se o menor lado.

EXEMPLOS

1. Sabe-se que num triângulo [*ABC*] , se tem:
$\hat{A} = 35°$, $\hat{B} = 130°$ e $\hat{C} = 15°$.
Indica o maior lado e o menor lado do triângulo.

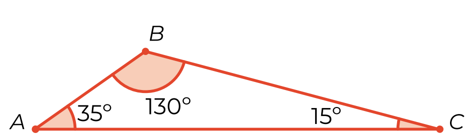
2. Num triângulo [*DEF*] , sabe-se que $\hat{D} = 99°$ e a amplitude do ângulo *E* é o dobro da amplitude do ângulo *F*.

2.1 Determina $\hat{E}$ e $\hat{F}$.

2.2 Indica o maior e o menor lado do triângulo.

Resolução:

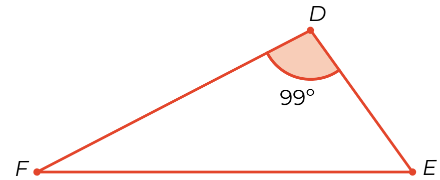
1. Como o maior ângulo é *B*, logo o maior lado é [*AC*].
Da mesma forma, sendo o menor ângulo *C*, o menor lado é [*AB*].



2.1 $180° - 99° = 81°$ Então, $\hat{F} = 27°$ e $\hat{E} = 54°$

$81° \div 3 = 27°$

2.2 Podemos concluir que o maior lado é $[FE]$ e o menor lado é $[DE]$.



QUADRILÁTEROS

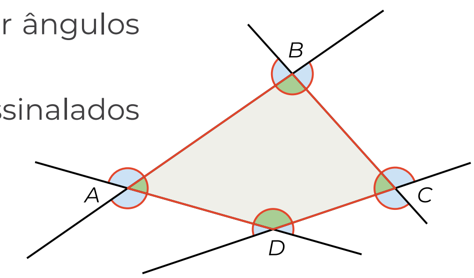
Recorda que:

Um quadrilátero é um polígono com quatro lados.

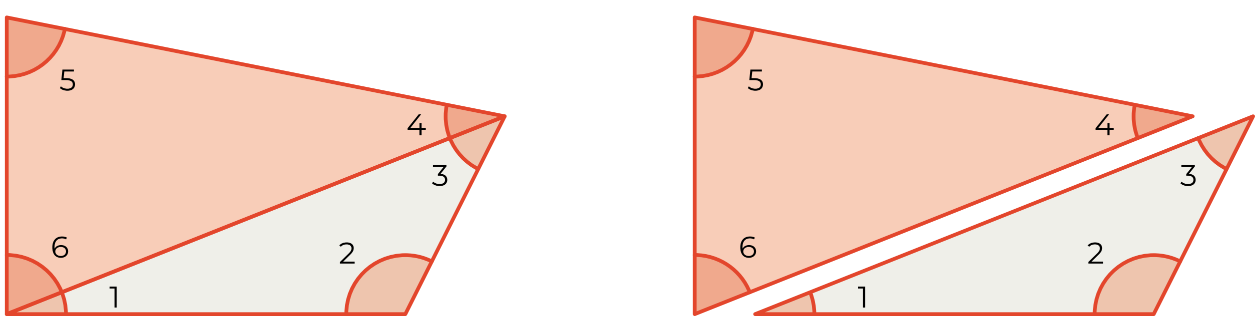
ÂNGULOS DE UM QUADRILÁTERO

Tal como num triângulo, num quadrilátero podemos identificar ângulos internos e externos, que se definem da mesma forma.

No quadrilátero $[ABCD]$ da figura, os ângulos internos estão assinalados com a cor verde e os externos com a cor azul.



Considera o quadrilátero da figura abaixo e uma das suas diagonais.



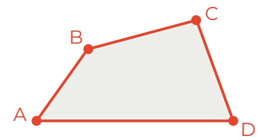
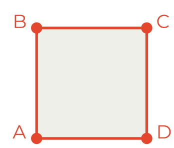
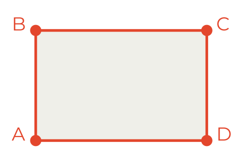
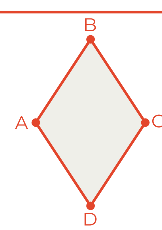
Por observação, verifica-se que o quadrilátero ficou dividido em dois triângulos.

Como sabes, a soma dos ângulos internos num triângulo é 180°, então, podemos concluir que:

A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.

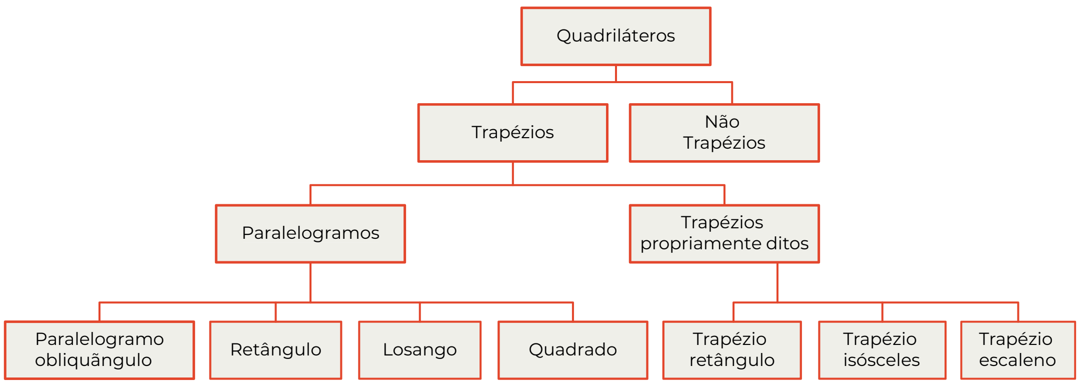
Classificação e propriedades dos quadriláteros

Como vimos no 6º ano, os quadriláteros são classificados da seguinte forma:

Nomes			Figuras Geométricas	Propriedades
Não Trapézios				Não possui lados paralelos.
Trapézios (dois lados paralelos)	Paralelogramos (lados paralelos dois a dois)	Paralelogramo		Tem lados opostos iguais; ângulos opostos iguais; as diagonais bissetam-se e não tem eixos de simetria.
		Quadrado		Tem quatro lados iguais; quatro ângulos retos; diagonais iguais e perpendiculares e tem quatro eixos de simetria.
		Retângulo		Tem lados opostos iguais; quatro ângulos retos; duas diagonais iguais e bissetam-se e tem dois eixos de simetria.
		Losango ou Rombo		Tem quatro lados iguais; ângulos opostos iguais; duas diagonais perpendiculares e bissetam-se e tem dois eixos de simetria.
	Trapézios Propriamente ditos	Trapézio isósceles		Tem dois lados iguais e um eixo de simetria.
		Trapézio retângulo		Tem um ângulo reto e não tem eixos de simetria.
		Trapézio escaleno		Tem quatro lados diferentes e não tem eixos de simetria.

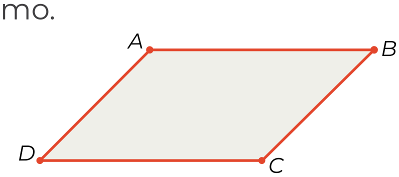
Como podes ver, todo o quadrado é simultaneamente retângulo e losango. Justifica.

Podemos apresentar a classificação usando um esquema em árvore:

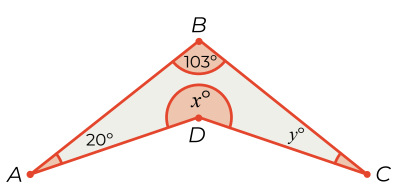


EXEMPLOS

1. A figura representa um paralelogramo [*ABCD*] e o ângulo *D* tem de amplitude 45°. Determina a amplitude dos outros ângulos internos do paralelogramo.



2. Na figura, $\overline{AB} = \overline{BC}$ e $\overline{AD} = \overline{DC}$. Determina as amplitudes dos ângulos x e y.



Resolução

1. Os ângulos opostos de um paralelogramo são geometricamente iguais.

Temos: $\hat{B} = \hat{D} = 45°$.

Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero é $360°$, então: $\hat{A} + \hat{C} = 360° – 90° = 270°$

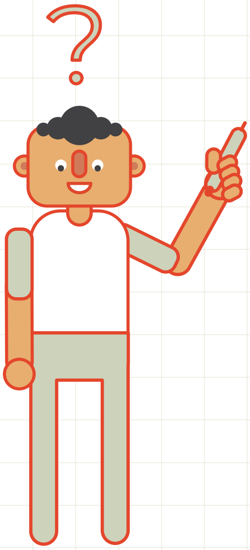
Como $\hat{A} = \hat{C}$, logo $\hat{A} = \hat{C} = 270° : 2 = 135°$.

- De acordo com a figura, os triângulos [ABD] e [BDC] são congruentes (critério ***LLL***), logo $y = \hat{C} = \hat{A} = 20°$.

Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero é $360°$, então: $x = 360° – (103° + 20° + 20°)$

$x = 217°$

Logo, $x = 217°$ e $y = 20°$



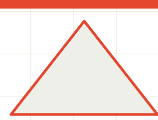
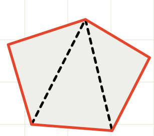
ATIVIDADES DE CONSOLIDAÇÃO

1. Constrói um retângulo sabendo que um dos ângulos das diagonais é de 40° e uma das diagonais tem 5 cm de comprimento. Enuncia as propriedades do retângulo que aplicaste na construção.

2. Constrói um paralelogramo, sabendo que um dos ângulos das diagonais é de 121° e uma das diagonais tem 8 cm de comprimento.
Quantas soluções tem este problema?

3. Utiliza desenhos e recortes em papel para verificar se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
3.1 a soma das amplitudes dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é de 360°;
3.2 em qualquer quadrilátero a soma das amplitudes dos ângulos opostos é 180°;
3.3 as diagonais de qualquer quadrilátero convexo bissetam-se;
3.4 em qualquer quadrilátero a soma das amplitudes de dois ângulos consecutivos é 180°.

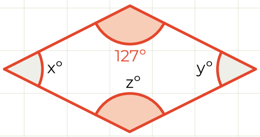
4. Copia para o teu caderno e completa:

Polígonos	Número de lados	Número de triângulos	Soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono
	3	1	180°
	4		
	5	3	3 x 180° = 540°
	6		
	7		
	18		
?	n		

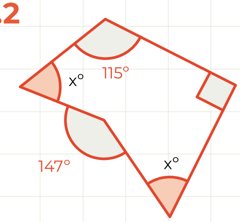
Que concluis acerca da soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono de n lados?

5. Para cada uma das figuras seguintes, determina o valor das amplitudes dos ângulos correspondentes às letras:

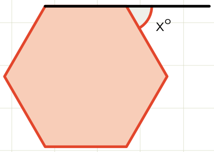
5.1



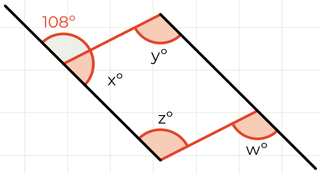
5.2



5.3



5.4



6. Decompondo as superfícies em quadriláteros e triângulos, faz estimativas para a área:

6.1 da tua mesa de trabalho;

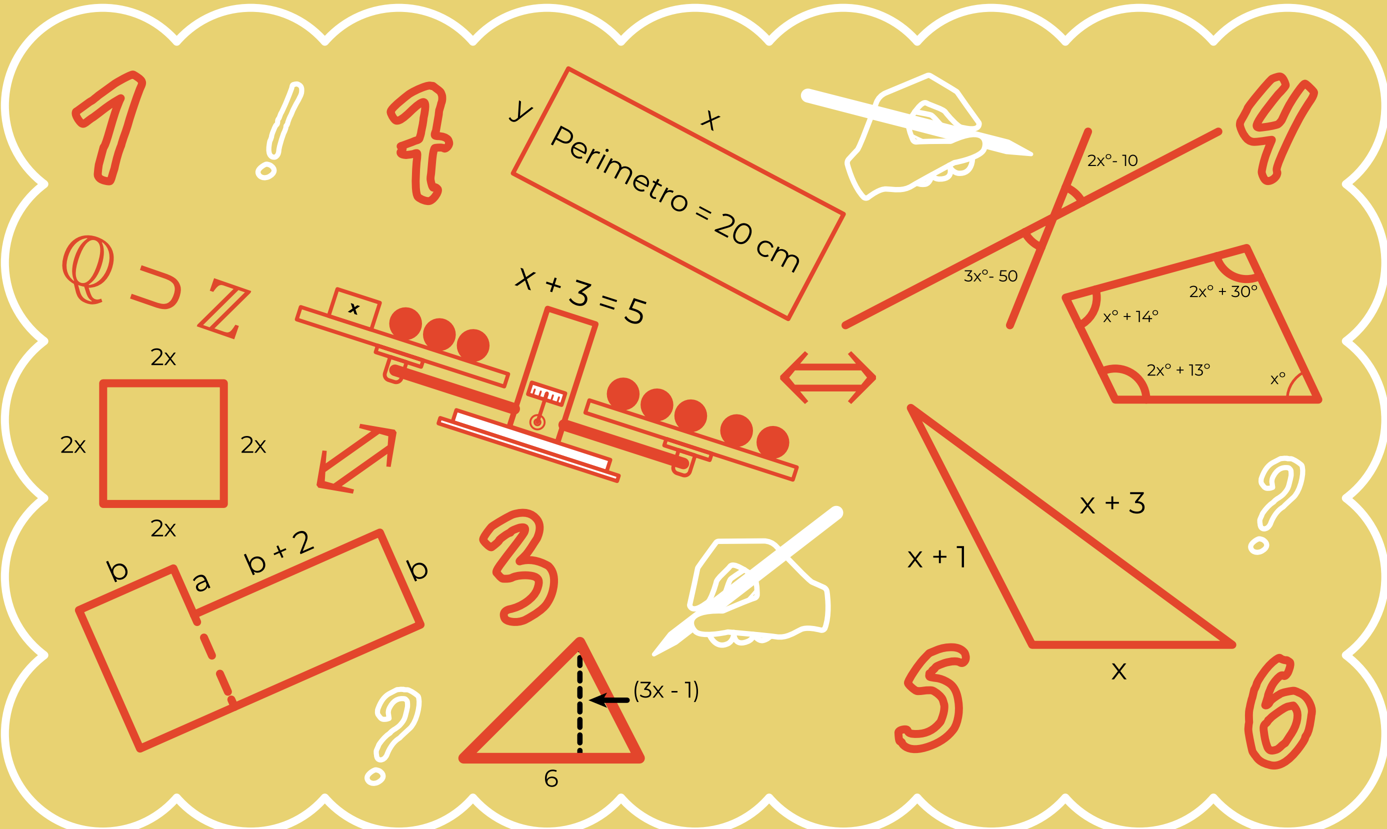
6.2 do chão da tua sala de aula.

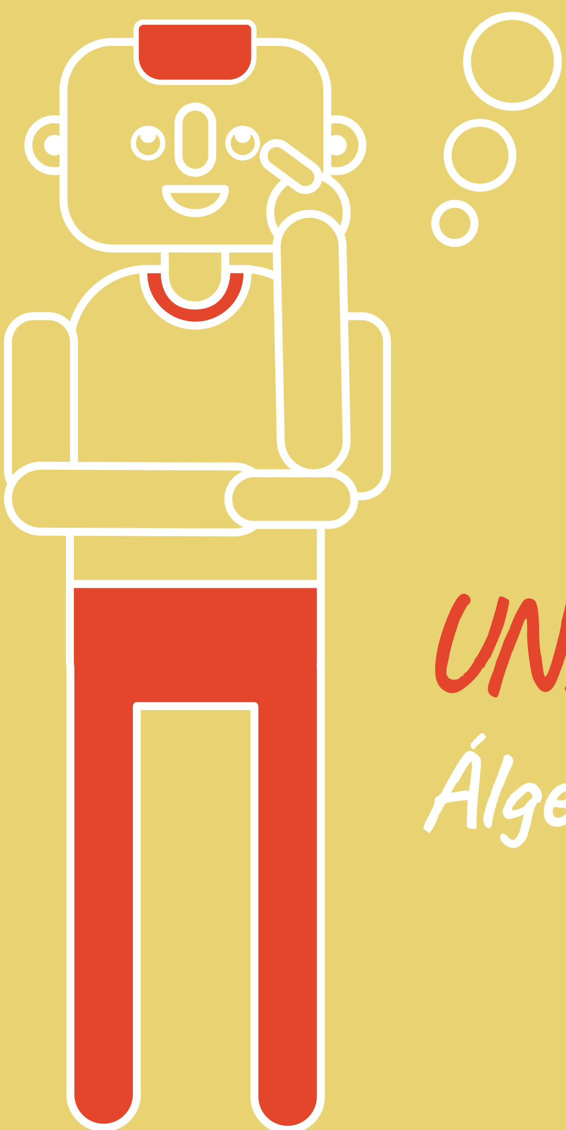
7. Desenha um retângulo [*ABCD*], sendo os lados $3\ cm$ e $6\ cm$.
Calcula a área do retângulo.

8. Constrói um paralelogramo [*ABCD*], sabendo que:

$\overline{AD} = 5$ cm ; $\overline{AB} = 6$ cm e $B\hat{A}D = 70°$.

Utiliza uma régua para medir a altura do paralelogramo que desenhaste e calcula a área do quadrilátero.





UNIDADE 5

Álgebra

UNIDADE 5

ÁLGEBRA

CONTEÚDOS:

- Designações e proposições
- Expressões com variáveis
- Conceito de monómios e polinómios
- Grau de monómio e grau de um polinómio
- Operações com monómios e polinónios
- Propriedades das operações com monómios e polimónios
- Noção de equação de primeiro grau a uma incógnita
- Solução de uma equação
- Equações equivalentes
- Resolução de equação de 1º grau com uma incógnita
- Regras para a resolução das equações de 1º grau
- Problemas
- Equações literais

OBJETIVOS:

- Identificar designações e proposições.
- Identificar designações equivalentes.
- Reconhecer o valor lógico de uma proposição.
- Identificar expressões com variáveis e expressões sem variáveis.
- Identificar expressões designatórias e expressões proposicionais.
- Concretizar variáveis.
- Simplificar uma expressão numérica.
- Calcular o valor numérico de uma expressão, concretizando a variável.
- Identificar monómios e polinómios.
- Distinguir monómio de polinómio.
- Determinar o grau de monómios e de polinómios.
- Efetuar a adição algébrica e a multiplicação com polinómios.
- Aplicar as propriedades das operações com monómios e polinómios.
- Identificar equações.
- Definir solução de uma equação.
- Procurar soluções de uma equação.
- Identificar equações equivalentes.
- Resolver equações do 1.º grau, utilizando as regras de resolução.
- Interpretar o enunciado de um problema.
- Escolher as incógnitas.
- Equacionar um problema.
- Analisar as soluções de uma equação, no contexto de um problema.
- Decidir sobre o resultado obtido.
- Inventar o enunciado de um problema que possa ser traduzido por uma dada equação.
- Resolver equações literais em ordem a uma das incógnitas.
- Realizar atividades de forma autónoma, responsável e criativa.
- Ser capaz de interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos.

DESIGNAÇÕES E PROPOSIÇÕES

DESIGNAÇÕES

O professor de matemática lançou um desafio aos seus alunos:
- Qual é o valor da expressão $1{,}4 + \frac{2}{5}$?

Uma parte da turma resolveu da seguinte forma:

$$1{,}4 + \frac{2}{5} = \frac{14}{10} + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} + \frac{2}{5} = \frac{9}{5}$$

O resultado está correto.

Outros foram por outro caminho:

$$1{,}4 + \frac{2}{5} = 1{,}4 + 0{,}4 = 1{,}8$$

Também está correto.
Todos tinham razão. "$\frac{9}{5}$" e "1,8" são representações diferentes do mesmo número.
Os números, assim como outros entes, da matemática ou não, são representados por expressões da linguagem matemática ou da linguagem corrente.
As expressões da linguagem que representam ou identificam entes têm o nome de designação.

Designações ou **termos** são expressões da linguagem que identificam os seres ou entes (matemáticos ou não).

Exemplos:

- Carro
- Escola
- $\frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{5}\right)$

Voltando à nossa situação inicial, podemos dizer que $\frac{9}{5}$ e 1,8 são designações do mesmo número.
Dizem-se, por isso, designações equivalentes ou sinónimas.

$$\frac{9}{5} = 1{,}8$$

Designações equivalentes são aquelas que representam o mesmo ente.

Exemplos

1. “O dobro da diferença entre – 3 e 7 ” é equivalente a “ 2 x (– 3 – 7) ”

2. “$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ “ é equivalente a “$-\frac{1}{4}$”

3. “Maior ilha de Cabo Verde” é equivalente a “ilha de Santiago”

PROPOSIÇÕES

Com os termos ou designações de uma linguagem e com outras palavras ou símbolos, podemos construir frases, como as seguintes:

- Cabo Verde é um país independente.
- $-9 > -15$
- A cor mais bonita é o azul.
- 5 é um número par.

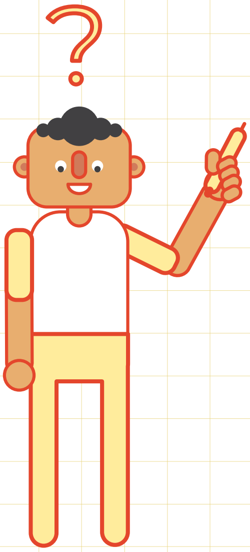
Enquanto que podemos afirmar, sem margem para dúvidas, que a primeira e a segunda são expressões verdadeiras, a última é uma expressão falsa. Nada podemos dizer relativamente à terceira, uma vez que a sua veracidade ou a sua falsidade depende do gosto de cada pessoa.
Na matemática, apenas se trabalha com as frases que se possa provar serem verdadeiras ou falsas – as **proposições**.

Proposições são frases (da matemática ou não) sobre as quais se pode afirmar, que são verdadeiras ou falsas.

Se uma proposição é verdadeira, dizemos que o seu **valor lógico** é **verdade** (V, verdadeiro). Se uma proposição é falsa, dizemos que o seu **valor lógico** é **falsidade** (F, falso).

Exemplos

Proposições	Valor lógico
Um triângulo equilátero tem 3 eixos de simetria	V
$-4 < -8$	F
$\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$	V
Todo o quadrado é retângulo	V



ATIVIDADES

1. De entre as expressões seguintes, indica as que são designações e as que são proposições e indica o valor lógico das proposições

1.1 3 é um número par

1.2 $\{-2, -1, 0, 1\}$

1.3. $2^4 - (-3)^2$

1.4 $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

2. Escreve designações equivalentes a:

2.1 $0{,}3 - \frac{4}{10}$

2.2 $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$

2.3 $15^6 \div 3^6 \times 5^6 + (-1)^{100}$

2.4 $2 \times \left(-1 - \frac{1}{3}\right)$

3. Traduz para a linguagem matemática as seguintes expressões:

3.1 O dobro de três é igual ao triplo de 2 .

3.2 Cinco é um número natural.

3.3 A soma da metade de cinco com o dobro de menos quatro.

3.4 A diferença entre a terça parte de catorze e o cubo de um oitavo.

EXPRESSÕES COM VARIÁVEIS

Já em anos anteriores, ouviste falar e utilizaste variáveis. Através de algumas atividades vamos rever e consolidar esse conceito.

ATIVIDADE 1

Considera a seguinte tabela

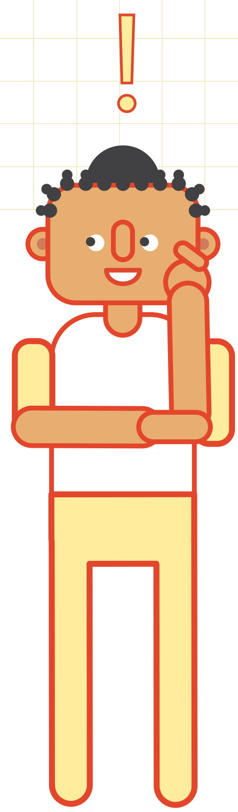
a	$2 \times a$
3	6
-5	-10
-0,2	-0,4
15	30
$\frac{1}{2}$	1

Repara que na primeira coluna estão valores de a e na segunda coluna estão os valores de $2 \times a$, para cada valor atribuído a a na primeira coluna. A letra a representa uma variável que é concretizada com os valores constantes da primeira coluna, isto é, do conjunto $\left\{3; -5; -0{,}2; 15; \frac{1}{2}\right\}$

ATIVIDADE 2

x	y	$-2 \times x + y$
3	-1	-7
0	-6	-6
$\frac{1}{4}$	2	$\frac{3}{2}$
10	20	0

A expressão $-2 \times x + y$ da terceira coluna tem duas variáveis, x e y, que são concretizadas usando os valores da primeira coluna e da segunda coluna respetivamente.
A variável x toma valores no conjunto $\left\{3, 0, \frac{1}{4}, 10\right\}$ e a variável y toma valores no conjunto $\{-1, -6, 2, 20\}$.
Na linguagem matemática, uma expressão com variáveis é uma expressão com letras, em que estas representam valores a serem tomados ou concretizados em conjuntos dados.
Ao conjunto em que uma variável toma valores designamos por **domínio** dessa variável.



EXPRESSÕES DESIGNATÓRIAS

Considera as expressões com variáveis
$3x + 1$, de domínio $A = \{-2\,;\,9{,}5\}$ e
"a quarta parte de y", de domínio $B = \{80\,,\,200\}$
Concretizando a variável x, temos:

- $3 \times (-2) + 1 = -5$
- $3 \times 9{,}5 + 1 = 29{,}5$

Para a variável y, temos:

- A quarta parte de $\longrightarrow \frac{1}{4} \times 80 = 20$
- A quarta parte de $\longrightarrow \frac{1}{4} \times 200 = 50$

Em ambos os casos, quando concretizamos a variável, obtemos uma designação.

Às expressões com variáveis, que se transformam em designações quando concretizamos as variáveis, chamamos **expressões designatórias**.

Cálculo do valor de expressões designatórias:

Determina o valor das seguintes expressões designatórias, para as concretizações das variáveis indicadas:

1. $3y + 2(x + y)$, para $x = -2$ e $y = 5$

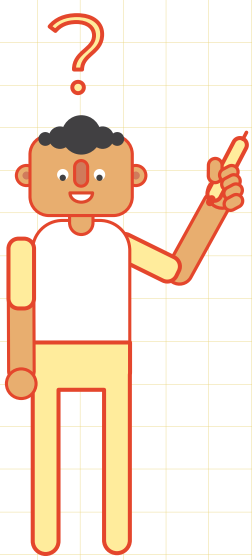
2. $\dfrac{a^4 - b}{a + c}$, para $a = -2$, $b = 1$ e $c = \dfrac{2}{3}$

Resolução

1. A expressão $3y + 2(x+y)$ é a mesma que $3 \times y + 2 \times (x+y)$
Fazendo a concretização das variáveis para os valores indicados, temos:
$3 \times 5 + 2 \times (-2 + 5) = 15 + 2 \times 3 = 15 + 6 = 21$

2. Substituindo a, b e c pelos valores considerados, temos:

$$\frac{a^4 - b}{a + c} = \frac{(-2)^4 - (-1)}{-2 + \frac{2}{3}} = \frac{16 + 1}{-\frac{6}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{17}{-\frac{4}{3}} = 17 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{51}{4}$$



ATIVIDADES

1. Utilizando as variáveis convenientes, traduz para a linguagem matemática as expressões dadas em linguagem corrente:
1.1 O triplo de um número.
1.2 A diferença entre dois números.
1.3 A soma da metade de um número com o seu quadrado.
1.4 O quadrado da diferença entre dois números.

2. Escreve em linguagem corrente as expressões dadas em linguagem matemática, sabendo que as variáveis representam números racionais:
2.1 $3a - b^3$ **2.2** $2(a + b)$ **2.3** $2x+y$

3. Calcula o valor numérico de cada uma das seguintes expressões designatórias para as concretizações indicadas:

3.1 $\dfrac{x + y}{2x - y}$ para $x = -3$ e $y = -2$

3.2 $x^2 - \dfrac{2x}{3y}$ para $x = -\dfrac{1}{2}$ e $y = -1$

3.3 $\dfrac{(a + b)^2}{2ab}$ para $a = -0{,}5$ e $b = 1{,}5$

EXPRESSÕES PROPOSICIONAIS OU CONDIÇÕES

Considera a expressão:

$\frac{x}{2} > 2$ definida no conjunto $A = \{1, 4, 8\}$

Concretizando a variável x, temos:

- $\frac{1}{2} > 2$ proposição falsa
- $\frac{4}{2} > 2$ proposição falsa
- $\frac{8}{2} > 2$ proposição verdadeira

A expressão $\frac{x}{2} > 2$ transformou-se numa proposição para cada concretização da variável x. Expressões deste tipo chamam-se **expressões proposicionais** ou **condições**.

Às expressões com variáveis, que se transformam em proposições quando concretizamos a variável, chamamos **expressões proposicionais** ou **condições**.

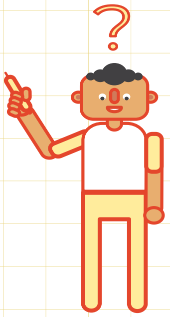
No exemplo acima, apenas o **8** transforma a expressão $\frac{x}{2} > 2$ numa proposição verdadeira; por este motivo, diz-se que **8** é uma solução da expressão dada ou que verifica a expressão.

Exemplos de condições:

1. $3 + x = 10$ de domínio $A = \{6, 7, 8\}$

2. $4 - \frac{x}{3} \leq 0,5$ de domínio $\mathbb{Z}$

ATIVIDADES



1. Classifica as seguintes expressões com variável:

1.1 "A soma de um número qualquer x com metade de 7".

1.2 $3x + 1 > x$

1.3 "O dobro de um número y é menor que esse número".

1.4 $\frac{x}{3} + y^2$

MONÓMIOS E POLINÓMIOS

MONÓMIOS

Considera as expressões designatórias

x^5 $\quad$ $-ax$ $\quad$ $-2ab$

$\frac{3}{5}x^2y$ $\quad$ $2x^3$ $\quad$ $-\frac{x}{5}$

Repara que todas as expressões apresentadas são produtos de números por uma ou mais variáveis ou suas potências.
Por exemplo:

x^5 é o mesmo que $1 \times x^5$

$-2ab$ é o mesmo que $-2 \times a \times b$

$-\frac{x}{5}$ é o mesmo que $-\frac{1}{5} \times x$

Um **monómio** é uma expressão designatória que consiste num número, numa variável ou num produto de números e variáveis.

Num monómio, temos a **parte numérica**, a que também chamamos **coeficiente**, e a **parte literal** que é constituída por letras (os seus produtos e as suas potências).

Exemplos:

Monómios	Coeficiente	Parte literal
$-\frac{1}{2}x$	$-\frac{1}{2}$	x
$3a$	3	a
$\frac{3}{5}x^2y$	$\frac{3}{5}$	x^2y
$-2ab$	-2	ab
$0{,}2y^5$	$0{,}2$	y^5
x^7	1	x^7
$-ax$	-1	ax
-14	-14	x^0

Observação: Nota que se o monómio é uma constante, a sua parte literal pode ser x^0, y^0, a⁰, b⁰, ..., tendo em conta que uma potência de expoente nulo é sempre igual a 1 , desde que a base seja diferente de zero.
Quando dois monómios têm a mesma parte literal, dizem-se **monómios semelhantes**.

Exemplos de monómios semelhantes:

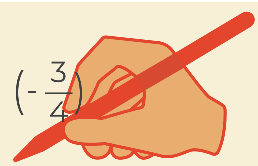
- $4x^6$ e $-3x^6$
- $-\frac{1}{5}y^2$ e $2y^2$
- $5xy^3$ e $\frac{xy^3}{4}$
- -1 e 7

Os monómios a seguir indicados, embora tenham o mesmo coeficiente, eles não são semelhantes, por terem partes literais diferentes.

- $2x$ e $2y$
- $-2ab^4$ e $-2a^4b$

Dois monómios semelhantes como $7x$ e $-7x$, com coeficientes simétricos, dizem-se **monómios simétricos**.

Dois monómios dizem-se simétricos se os seus coeficientes forem simétricos.



Grau de um monómio

O **grau de um monómio** é a soma dos expoentes da sua parte literal.

Por exemplo, considerando o monómio $-3x^2y^3$, sendo 2 e 3 os expoentes das variáveis x e y, respetivamente, o monómio tem grau 5.

Exemplos:

a) $5x^4$ tem grau 4

b) $-2ab^2$ tem grau 3, pois $1 + 2 = 3$

c) $3^5 = 3^5 \times 1 = 3^5 \times x^0$, por exemplo, pois $x^0 = 1$, pelo que x^0 é a sua parte literal. Assim, o monómio 3^5 tem grau 0 (zero).

ATIVIDADES

1. Completa o quadro:

Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau
$-9x$			
$3x^3$			
$-\frac{1}{2}x^2y$			
a^5x^3			
$-\frac{xy}{3}$			
	$\frac{1}{5}$	xy^3	

2. Considera os seguintes monómios:

i) $\frac{7}{5}a^2$, **ii)** $\frac{1}{3}ab$, **iii)** $-\frac{a^2}{2}$, **iv)** $2a^2 b$ **v)** -5

2.1 Indica dois monómios semelhantes.
2.2 Determina um monómio semelhante ao primeiro, mas de coeficiente igual ao simétrico do inverso de $\frac{3}{2}$.

OPERAÇÕES COM MONÓMIOS

ADIÇÃO ALGÉBRICA DE MONÓMIOS

Vamos ver que, tal como no conjunto dos números racionais, é possível efetuar as operações usuais com monómios: a adição algébrica, a multiplicação e a potenciação. Também veremos que essas operações têm as mesmas propriedades que as operações em $\mathbb{Q}$.
No caso de os monómios serem semelhantes, a sua soma pode simplificar-se utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica.

Exemplos:

- $5x + 8x = (5 + 8)x = 13x$
- $3a^2 - 7a^2 = (3 - 7)a^2 = - 4a^2$
- $\frac{1}{3}y^3 + y^3 = \left(\frac{1}{3} + 1\right)y^3 = \frac{4}{3}y^3$

A soma de monómios semelhantes é um monómio semelhante aos monómios parcela e com coeficiente igual à soma algébrica dos coeficientes dos monómios parcelas.

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO DE MONÓMIOS

A adição de monómios goza de todas as propriedades da adição de números racionais estudadas anteriormente:

- **Comutativa**

  Exemplo:

  $- 5x + 7x = 7x + (- 5x)$

  $- 5x + 7x = 2x$

  $7x + (- 5x) = 2x$

- **Associativa**

  Exemplo:

  $2x^2+[12x^2 + (- 8x^2)] = (2x^2 + 12x^2)+(- 8x^2)$

  $2x^2+4x^2 = 14x^2+(- 8x^2)$

  $6x^2 = 6x^2$

- **Existência do elemento neutro**

  Exemplo:

  $-4y + 0 = 0 + (-4y)$

  $-4y = -4y$

- **Existência do elemento simétrico**

  Exemplo:

  $6x + (-6x) = -6x + 6x = 0$

  $0=0$

MULTIPLICAÇÃO DE MONÓMIOS

O produto de monómios é um monómio, com coeficiente igual ao produto dos coeficientes dos fatores e com a parte literal igual ao produto das partes literais dos fatores.

Exemplos:

$2x \times (-3x^2) = [2x(-3)] \times (x \times x^2) = -6x^3$

$-\frac{1}{3}a^2 \times (-5a^3) = \left[\left(-\frac{1}{3}\right) \times (-5)\right] \times (a^2 \times a^3) = \frac{5}{9}a^5$

$1 \times ab = ab$

$3y^7 \times 0 = 0$

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE MONÓMIOS

À semelhança da adição de monómios, a multiplicação de monómios também goza das mesmas propriedades da multiplicação estudadas anteriormente, isto é:

- **Comutativa**

  Exemplo:

  $-6x \times \frac{1}{3} \times = \frac{1}{3} \times (-6x)$

  $(-2x^2)=(-2x^2)$

- **Associativa**

  Exemplo:

  $3x^3 \times [2x^2 \times (-4x)] = (3x^3 \times 2x^2) \times (-4x)$

  $3x^3 \times (-8x^3) = 6x^5 \times (-4x)$

  $(-24x)^6 = (-24x)^6$

- **Existência do elemento neutro**

  Exemplo:

  $-4y \times 1 = 1 \times (-4y)$

  $-4y = -4y$

- **Existência do elemento absorvente**

  Exemplo:

  $6a \times 0 = 0 \times 6a = 0$

  $0 = 0$

- **Distributiva em relação à adição algébrica**

  Exemplos:

  $3a \times [7a + (-2a)] = (3a \times 7a) + [3a \times (-2a)]$

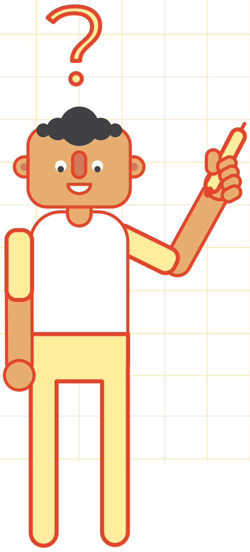
  $3a \times 5a = 21a^2 + (-6a^2)$

  $15a^2 = 15a^2$

  $(2xy - 5xy) \times 4xy = (2xy \times 4xy) - (5xy \times 4xy)$

  $(-3xy) \times 4xy = 8x^2y^2 - 20x^2y^2$

  $-12x^2y^2 = -12x^2y^2$



ATIVIDADES

1. Calcula, aplicando as propriedades das operações com monómios:

1.1 $-2x^3 + 5x^3$ **1.2** $\frac{1}{3}xy - \frac{2}{3}xy$ **1.3** $\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{4}x^2y$

1.4 $3x^2 \times (-5x^3)$ **1.5** $\frac{3}{4}a^3b \times \frac{1}{5}b$ **1.6** $0{,}1x^4y \times 10xy$

1.7 $\frac{1}{5}xy \times \frac{5}{3}xy^2 \times \left(-\frac{3}{2}x^2y\right)$ **1.8** $-2ab \times 3a^2 \times \frac{1}{6}b$ **1.9** $6x \times [-10x + (-x)]$

POLINÓMIOS

A soma dos monómios -4 e $-8x$ é a expressão
$-4 + (-8x) = -4 - 8x$.
A expressão obtida tem o nome de polinómio.

Um **polinómio** é uma soma algébrica de monómios (dois ou mais) chamados **termos do polinómio**.

Exemplos:
O polinómio:
I. $2xy^2 - \frac{1}{2}x^3y - \frac{1}{2}x^2y$ é a soma algébrica dos monómios $2xy^2$, $-\frac{1}{2}x^3y$ e $-\frac{1}{2}x^2y$, que são os termos do polinómio.

II. $10a^2 - \frac{7}{2}a + 4$ é a soma algébrica dos monómios $10a^2$, $-\frac{7}{2}a$ e 4 que são os termos do polinómio.

O **grau** de um polinómio é o grau do monómio com maior grau que nele figura.
Exemplos:
O polinómio considerado no exemplo **I** tem grau 4, enquanto que o do exemplo **II** tem grau 2.

Considera agora os polinómios:
$3m^4 + 2m + 3$ e $x^2y + 3$
O primeiro tem grau 4 e segundo tem grau 3.

Se um polinómio tem dois termos chama-se um **binómio**; e se tem três termos chama-se um **trinómio**.
Habitualmente, um polinómio na variável x nota-se ou representa-se por P(x). Da mesma forma, se tiver as variáveis x e y, representa-se por P(x, y). Assim, o polinómio P (a, b, c) é um polinómio nas variáveis a, b e c. Um polinómio representa-se por uma letra maiúscula, seguida das variáveis, entre parêntesis.

Exemplos:
$P(x) = -3x^2 + x - \frac{1}{5}$

O polinómio P(x) tem grau 2, os seus termos são: $= -3x^2$, x e $-\frac{1}{5}$. Este polinómio é um trinómio e está ordenado segundo as potências decrescentes da variável x.

$P(p, q) = -2p + q$
O polinómio P(p, q) tem grau 1, os seus termos são: $-2p$ e q.
Este polinómio é um binómio.

FORMA REDUZIDA DE UM POLINÓMIO

Considera o polinómio:
$10 + 2x + 9y - 7x + 14y - 10$
Para escrever o polinómio numa forma reduzida, pode preceder-se do seguinte modo:
$10 + 2x + 9y - 7x + 14y - 10$ Identificamos os termos semelhantes.
$2x - 7x + 14y + 9y + 10 - 10$ Adicionamos os termos semelhantes.
$-5x + 21y$
Assim, para escrever um polinómio numa forma reduzida, adicionam-se algebricamente os termos semelhantes desse polinómio.

Exemplos:
Escreve numa forma reduzida cada um dos seguintes polinómios:
I. $a + 3b + 6a - 9b + 7$
II. $2x + 3x^2 + 4y^2 - 3x + 2y^2$

Resolução
I. $a + 3b + 6a - 9b + 7 = a + 3a + 3b - 9b + 7 =$
$= 4a - 6b + 7$
II. $2x + 3x^2 + 4y^2 - 3x + 2y^2 = 3y^2 + 2y - 3x + 4y^2 + 2y^2 =$
$= 3x^2 - x + 6y^2$

OPERAÇÕES COM POLINÓMIOS

ADIÇÃO ALGÉBRICA DE POLINÓMIOS

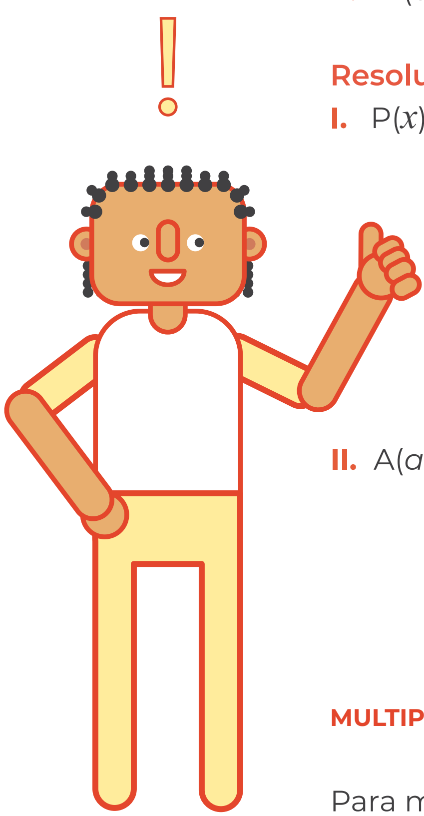
Para adicionarmos dois polinómios, adicionam-se os seus termos semelhantes.

Exemplos:

Vamos adicionar os polinómios

I. $P(x) = -3x^2 + x - 1$ e $Q(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - 4$

II. $A(a) = a - \frac{a}{3} + 7a - 5 - 6a$ e $B(a) = \frac{1}{3}a - 5a + 8$



Resolução

I. $P(x) + Q(x) = (-3x^2 + x - 1) + (x^2 + \frac{1}{2}x - 4)$

$$= -3x^2 + x - 1 + x^2 + \frac{1}{2}x - 4$$

$$= -3x^2 + x^2 + x + \frac{1}{2}x - 1 - 4$$

$$= -2x^2 + \frac{3}{2}x - 5$$

II. $A(a) + B(a) = (a - \frac{a}{3} + 7a - 5 - 6a) + (\frac{1}{3}a - 5a + 8)$

$$= a - \frac{a}{3} + 7a - 5 - 6a + \frac{1}{3}a - 5a + 8$$

$$= -3a + 3$$

MULTIPLICAÇÃO DE UM MONÓMIO POR UM POLINÓMIO

Para multiplicar um monómio por um polinómio, aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica.

Exemplo:

$7x \times (5x + 2) = 7x \times 5x + 7x \times 2$

$= 35x^2 + 14x$

Então,

Para multiplicar um monómio por um polinómio multiplica-se esse monómio por cada um dos termos (monómios) do polinómio.

Exemplos

$$2x \times (3x^2 - x + 4) = 2x \times 3x^2 + 2x \times (-x) + 2x \times 4$$
$$= 6x^3 - 2x^2 + 8x$$

$$\left(2a + \frac{3}{2}b - 4\right) \times (-3a) = 2a \times (-3a) + \frac{3}{2}b \times (-3a) - 4 \times (-3a)$$
$$= -6a^2 - \frac{9}{2}ab + 12a$$

MULTIPLICAÇÃO DE POLINÓMIOS

Considera, por exemplo, os polinómios:

$A(x) = -2x^2 + 1$ e $B(x) = x - 4$

$A(x) \times B(x) = (-2x^2 + 1) \times (x - 4) =$ aplicando a propriedade distributiva

$= -2x^2 \times (x - 4) + 1 \times (x - 4) =$

$= -2x^3 + 8x^2 + x - 4$

Para multiplicar dois polinómios, multiplica-se cada termo do primeiro polinómio por cada um dos termos do segundo polinómio.

Exemplos

Calcula:

$(2x - 1)(-3x + 4)$ e $(5y^2 + 3y - 2)(2y + 4)$

Resolução:

$$(2x - 1)(-3x + 4) = 2x \times (-3x) + 2x \times 4 - 1 \times (-3x) - 1 \times 4 =$$
$$= -6x^2 + 8x + 3x - 4 =$$
$$= -6x^2 + 15x - 4$$

$$(5y^2 + 3y - 2)\ (2y + 4) = 10y^3 + 20y^2 + 6y^2 + 12y - 4y - 8 =$$
$$= 10y^3 + 26y^2 + 8y - 8$$

ATIVIDADES

1. Simplifica cada uma das seguintes expressões:

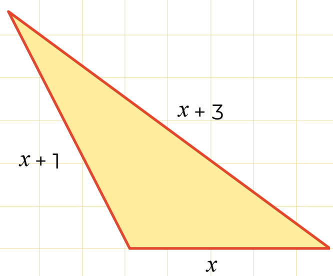
1.1 $(5x - 4) + (-2x - 8)$ **1.2** $(3x^2 + 2x - 1) - \left(\frac{x^2}{2} - 4x\right)$ **1.3** $-(y + 1) + (y - 5) - 2(0{,}3 + y)$

1.4 $6x(-4x + 2)$ **1.5** $x\left(\frac{x}{2} - 3\right) + 3x + x^2$ **1.6** $\frac{a(a+1)}{2} - \frac{a}{3}(a + 4)$

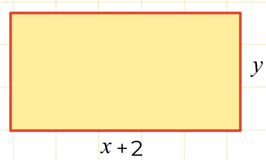
1.7 $(-x + 2)(4x - 3)$ **1.8** $(3y^2-1)\left(\frac{1}{2}y - 1\right)$ **1.9** $(y - 1)(2y + 3) + 2y(y^2 + 1)$ **1.10** $(x+5)^2$

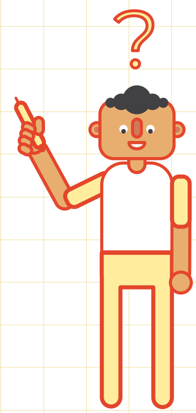
2. Para cada uma das seguintes figuras, indica uma expressão simplificada do perímetro. As medidas estão na mesma unidade.

2.1

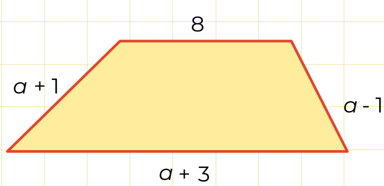


2.2

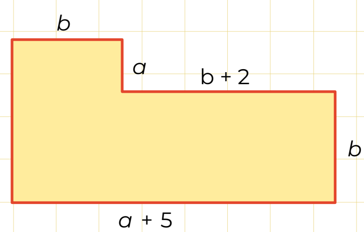




2.3

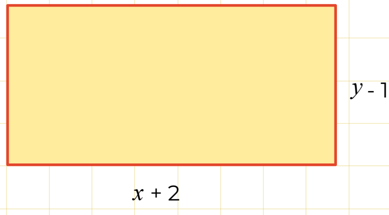


2.4

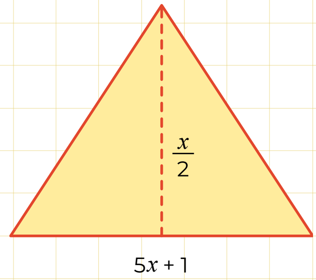


3. Escreve uma expressão simplificada da área de cada uma das seguintes figuras:

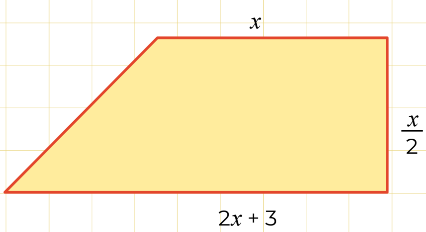
3.1



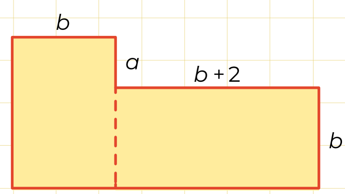
3.2



3.3



3.4



EQUAÇÕES DO 1º GRAU

O Pedro pensou num número, adicionou-lhe 4 unidades e obteve 15.
Qual foi o número em que o Pedro pensou?
Representando por x o número em que o Pedro pensou, escrevemos a seguinte igualdade: $x + 4 = 15$
A uma expressão do tipo, designamos por **equação**.

Equação é uma igualdade em que figura, pelo menos, uma variável.

Na equação $x + 4 = 15$, à variável x chama-se **incógnita**.
Numa equação, a expressão que fica à esquerda do sinal " = " chama-se **primeiro membro**; a expressão que fica à direita do sinal " = " chama-se **segundo membro**.

Por exemplo, na equação $x + 4 = 15$, o primeiro membro é $x + 4$ e o segundo membro é 15.
As parcelas que constituem cada um dos membros duma equação chamam-se termos da equação.
Assim, x, 4 e 15 são os termos da equação $x + 4 = 15$, onde 4 e 15 são designados por **termos independentes** (termos de grau zero).

No problema inicial vê-se que o Pedro pensou no número 11, pois
$11 + 4 = 15$ (proposição verdadeira)
Então, ao número **11** chamamos **raiz** ou **solução da equação**.

Raiz ou **solução de uma equação** é o valor para qual, concretizando a incógnita, transforma a equação numa proposição verdadeira.

Ao conjunto das soluções de uma equação chama-se **conjunto-solução** da equação.
Quando duas equações têm o mesmo conjunto-solução, elas dizem-se **equações equivalentes**.
Para indicar que duas equações são equivalentes, utiliza-se o símbolo $\Leftrightarrow$.

Exemplos:

1. $x + 7 = 10 \Leftrightarrow 6 - x = 3$
2. $2y + 4 = 4 \Leftrightarrow 5 - y = 5$

Exemplo:

Considera a equação $3x + 2 = x - 10$.

1. Indica a incógnita, os membros, os termos e os termos independentes.

2. Verifica se -6 e 2 são soluções da equação.

3. Mostra que a equação $2x = -12$ é equivalente à equação dada.

Resolução:

1. Na equação, temos:

Incógnita x Primeiro membro $3x + 2$; Segundo membro $x - 10$;

Os termos $3x$; 2; x; e -10; Termos independentes 2 e -10

2. Para verificar se os números dados são soluções da equação, começamos por substituir a incógnita por cada um dos respetivos valores.

Então, para $x = -6$ temos $3 \times (-6) + 2 = -6 - 10$

$-18 + 2 = -16$

$-16 = -16$ proposição verdadeira

Logo, -6 é solução da equação.

para $x = 2$ temos $3 \times 2 + 2 = 2 - 10$

$6 + 2 = -8$

$8 = -8$ proposição falsa

Portanto, 2 não é solução da equação.

3. Basta verificar que -6 também é solução da equação $2x = -12$

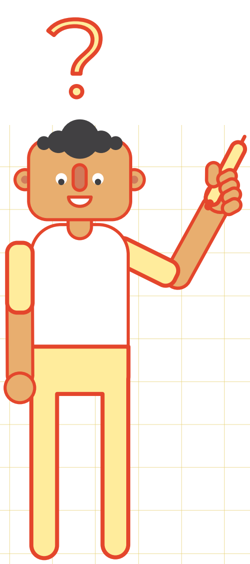
Ou seja, $2 \times (-6) = -12$

$-12 = -12$ proposição verdadeira

Então, as duas equações são equivalentes, porque têm o mesmo conjunto-solução, neste caso, $S = \{-6\}$.

Escrevemos:

$3x + 2 = x - 10 \Leftrightarrow 2x = -12$



ATIVIDADES

1. Nas expressões seguintes, indica as que são equações:

1.1 $3x + 1 = 16$

1.2. $2x + 4 > 12$

1.3 $x - 1 + 7 = 5x$

1.4 $30 - 5 = 25$

1.5 $4x - 1 = 6$

1.6 $\frac{x}{4} - 1 < 2x$

1.7 $\frac{x}{4} - 1$

2. Completa a tabela corretamente, como o exemplo:

Equação	Incógnita	1º Membro	2º Membro
$3x - 1 = x + 4$	x	$3x - 1$	$x + 4$
$1 + 3y = -y + 4$			
$2a - a + 1 = a - 3$			

3. Verifica se o número –1 é raiz das equações abaixo:

3.1 $3x - 44 = x - 46$ **3.2** $13 - 3x = x + 17$ **3.3** $10x - 6x + 8 = x - 2x$

4. Considera as equações: $9a = 18$; $-6x = 0$; $0 = y - 2$;
e o conjunto $A = \{-6, -2, 0, 2\}$

4.1 Verifica, para cada caso, se os elementos do conjunto são soluções das equações.

4.2 Das equações dadas, indica duas equações que são equivalentes.

5. Associa as frases às equações de modo a obteres correspondências verdadeiras.

(a) A soma do triplo de um número com 5 é igual a 7 .

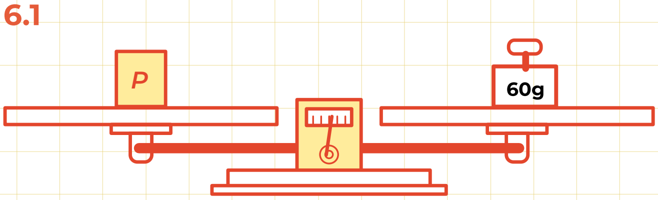
(b) A diferença entre o dobro de um número e a quarta parte de outro é igual a 7.

(c) A soma de um número com a sua sétima parte é igual a 7.

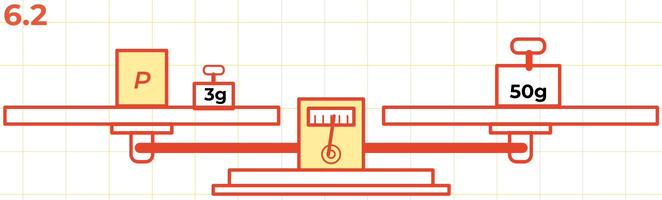
I. $x + \frac{x}{7} = 7$ **II.** $3x + 5 = 7$ **III.** $2x - 4y = 7$

6. Considera que as balanças estão em equilíbrio. Representando por ***P*** o peso de cada lata, determina ***P***.

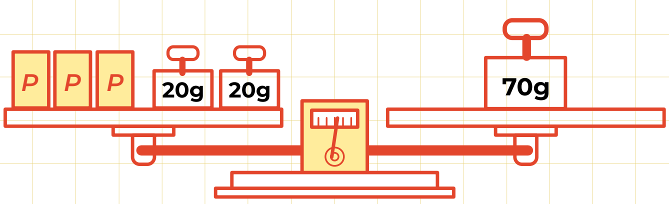
6.1



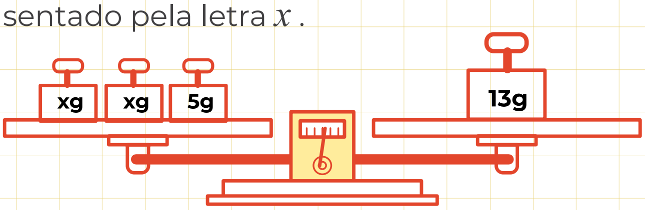
6.2



6.3



7. Considere a balança em equilíbrio na figura abaixo. Indica o valor representado pela letra x .



PRINCÍPIOS DE EQUIVALÊNCIA DAS EQUAÇÕES
PRINCÍPIO DA ADIÇÃO

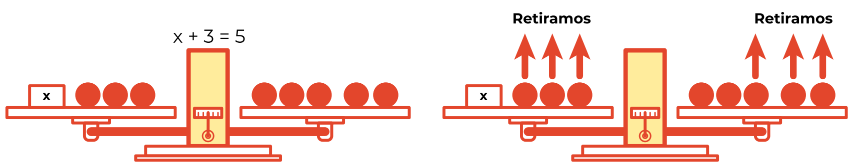
Já comparamos uma equação a uma balança em equilíbrio. Assim:

- Se adicionarmos um corpo a um dos pratos, para manter a balança em equilíbrio, uma massa igual deve ser colocada no outro prato;
- Se retirarmos um corpo a um dos pratos, para manter a balança em equilíbrio, uma massa igual deve ser retirada ao outro prato.

Consideremos agora a equação $x + 3 = 5$. Se adicionarmos (-3) aos dois membros, fica $x + 3 = 5 \Leftrightarrow x + 3 + (-3) = 5 + (-3)$

$\Leftrightarrow x = 2$

Fazendo uma analogia com a balança, temos:



Retirando três bolinhas de cada lado a balança continua equilibrada. Assim, podemos enunciar o seguinte princípio de equivalência das equações:

Numa equação, podemos adicionar ou subtrair a ambos os membros o mesmo número, obtendo uma equação equivalente à primeira.

Relembra ainda que, numa adição, quando desconhecemos uma das parcelas, podemos obtê-la através da operação de subtração (operação inversa da adição).

A equação $x + 3 = 5$ é equivalente à equação $x = 5 - 3$
Comparando as duas equações, podemos dizer que o termo passou do primeiro membro para o segundo membro, com o sinal contrário.

Considera agora o seguinte problema:
O perímetro de um quadrado é igual a 16 *cm*. Qual é a medida do lado?
Representando por x a medida do lado do quadrado e sabendo que o perímetro é a soma dos comprimentos de todos os lados, podemos traduzir o problema pela seguinte equação:
$x + x + x + x = 16 \Leftrightarrow 4x = 16$
Para resolver esta equação, vamos utilizar a seguinte propriedade.

PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO

Numa equação, podemos multiplicar ou dividir ambos os membros por um mesmo número diferente de zero, obtendo-se, assim, uma equação equivalente à primeira.

Então, na equação $4x = 16$, multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{4}$, obtemos:

$\frac{1}{4} \times 4x = \frac{1}{4} \times 16$ ou $\frac{4x}{4} = \frac{16}{4}$ o que, simplificando as frações obtidas, leva a $x = 4$.

$$4x = 16 \Leftrightarrow x = 4$$

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

Resolver uma equação consiste em determinar o seu conjunto-solução.
Para resolver uma equação aplicam-se os princípios de equivalência.

Exemplos:

Resolve cada uma das seguintes equações:

1. $3x - 7 = 2x + 1$

2. $3x - 4 - 5x = 8x - 7$

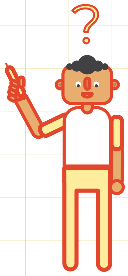
Resolução:

Vamos resolver cada uma das equações, utilizando as seguintes regras:
Obtemos uma equação equivalente se:

- passarmos um termo de um membro para o outro trocando-lhe o sinal (princípio da adição);
- multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros por um número diferente de zero (princípio da multiplicação).

1. Na equação, começamos por colocar os termos com incógnita num dos membros e os termos independentes no outro.
$3x - 7 = 2x + 1 \Leftrightarrow 3x - 2x = 1 + 7$ reduzindo os termos semelhantes, temos
$x = 8$
Conjunto solução = $\{8\}$

2. $3x - 4 - 5x = 8x - 7$
$\Leftrightarrow 3x - 5x - 8x = -7 + 4$
$\Leftrightarrow -10x = -3$ multiplicando ambos os membros por (-1), temos
$\Leftrightarrow (-1) \times (-10x) = (-1) \times (-3)$
$\Leftrightarrow 10x = 3$ dividindo ambos os membros por 10 , vem
$\Leftrightarrow \frac{10x}{10} = \frac{3}{10}$
$\Leftrightarrow x = \frac{3}{10}$ Conjunto solução = $\left\{\frac{3}{10}\right\}$



ATIVIDADES

1. Resolve cada uma das equações e representa o conjunto solução:

1.1 $2x + 3 = x$ **1.2** $4 + 6a = 10a$ **1.3** $-y + 6 = y$

1.4 $c + 2c = c + 2$ **1.5** $5x - 1 = x$ **1.6** $2a - 3 = 10a$

1.7 $-x = 3x - 8$ **1.8** $y = 5y + 2y$ **1.9** $7 + x = 2x$

Iremos agora trabalhar outros tipos de equações, nomeadamente, as equações com parêntesis e as equações com denominadores.

Seja, por exemplo, a equação

$$2(x - 6) - (x - 2) = 4$$

Para resolver esta equação, temos, em primeiro lugar, que desembaraçar de parêntesis.

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica, temos $2x - 12 - x + 2 = 4$

Neste caso, é mais conveniente passar para o 2º membro os termos independentes, não esquecendo de lhes trocar o sinal.

$2x - x = 4 + 12 - 2$

$\Leftrightarrow x = 14$ Conjunto solução = {14}

Vamos, agora, resolver a equação $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{2}$

Como só é possível adicionar frações quando elas têm mesmo denominador, vamos reduzir as três frações, que aparecem nesta equação, ao mesmo denominador.

Assim,

$$\underset{(\times 3)}{\frac{x-2}{4}} = \underset{(\times 4)}{\frac{x}{3}} + \underset{(\times 6)}{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{12} = \frac{4x}{12} + \frac{6}{12}$$

ou seja $\dfrac{3x - 6}{12} = \dfrac{4x}{12} + \dfrac{6}{12}$

Ora, multiplicando ambos os membros da equação por 12 , temos:

$$12 \times \frac{3x-6}{12} = 12 \times \left(\frac{4x}{12} + \frac{6}{12}\right)$$

Efetuando as operações e simplificando as frações, temos:

$$\frac{36x - 72}{12} = \frac{48x}{12} + \frac{72}{12}$$

portanto, podemos escrever:

$3x - 6 = 4x + 6$

Transformamos, assim, com termos fracionários numa equação sem denominadores, isto é, **desembaraçamos de denominadores**.

Na prática, procede-se do seguinte modo:

$$\underset{(\times 3)}{\frac{x-2}{4}} = \underset{(\times 4)}{\frac{x}{3}} + \underset{(\times 6)}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$3(x-2) = 4x + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - 6 = 4x + 6$$

Quer dizer que, na prática, não é necessário escrever o denominador comum a todas as frações nos dois membros. Como vês, basta igualar os denominadores.

A esta simplificação chama-se **desembaraçar de denominadores**.

E, continuando a resolver a equação, temos:

$3x - 4x = 6 + 6$

$-x = 12$

Multiplicando os dois membros por -1 , temos $x = -12$

Conjunto solução = $\{-12\}$

Ainda mais um exemplo:

Resolve a equação

$$3\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{4} - 2$$

Sempre que numa equação aparecem parêntesis, a sua resolução começa por desembaraçar de parêntesis, aplicando a propriedade distributiva em relação à adição algébrica.

Logo, $3x - \frac{3}{2} = \frac{x}{4} - 2$

Vamos, agora, **desembaraçar de denominadores**.

$$\underset{(\times 4)}{\frac{3x}{1}} - \underset{(\times 2)}{\frac{3}{2}} = \underset{(\times 1)}{\frac{x}{4}} - \underset{(\times 4)}{\frac{2}{1}}$$

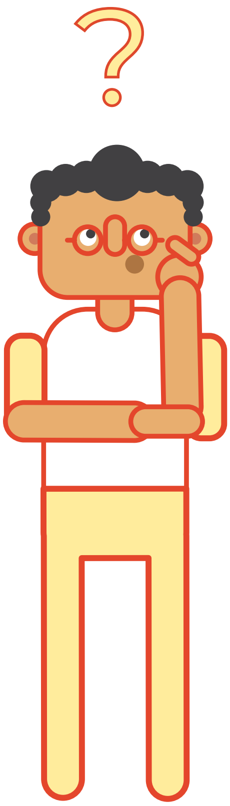
e, então, conforme já dissemos, escrevemos agora os numeradores,

$12x - 6 = x - 8$

Vamos, agora, passar para o 1° membro os termos que contêm a incógnita e para o 2° membro os restantes. Teremos,

$12x - x = -8 + 6$ ou $11x = -2$

$\frac{11x}{11} = \frac{-2}{11}$ Portanto $x = -\frac{2}{11}$ Conjunto solução = $\left\{-\frac{2}{11}\right\}$



CLASSIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES

Pode acontecer que na resolução de uma equação se chegue a uma proposição falsa.

Exemplo:

Resolve a equação $x + 5 = x + 8$

Da resolução de equações, temos:

$x + 5 = x + 8 \Leftrightarrow x - x = 8 - 5$

$\Leftrightarrow 0x = 3$

$\Leftrightarrow 0 = 3,$

pois 0 (zero) é o elemento absorvente da multiplicação. Fica-se assim com $0 = 3$, que é uma proposição falsa!

Por isso se diz que esta equação é **impossível**, ou seja, o conjunto-solução da equação é o conjunto vazio.

Considera, agora, a equação

$3x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)$

A sua resolução é:

$$3x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 3x + 1 = 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3x = 1 - 1 \Leftrightarrow 0x = 0$$

Independentemente do valor atribuído à incógnita, obtemos sempre uma proposição verdadeira.

Por isso, diz-se que se trata de uma equação **indeterminada**, pois tem um número infinito de soluções.

As equações podem ser **possíveis**, quando têm soluções, ou **impossíveis**, quando não têm soluções.

- quando uma equação possível admite um número finito de soluções, diz-se **determinada**;
- quando uma equação possível admite um número infinito de soluções, diz-se **indeterminada**.

ATIVIDADES

1. Resolve e classifica cada uma das equações

1.1 $6x - 1 = x + 9$

1.2 $3(2y - 3) + 4(y + 2) = 2(5y - 2)$

1.3 $0{,}3 - 0{,}1x = 1{,}2$

1.4 $5a - 3 = 2(a - 1) - (-3a + 1)$

1.5 $0{,}5x = \frac{1}{2}(x - 1)$

1.6 $-8(x + 1) = -8x - 8$

2. Depois de resolver cada uma das seguintes equações, verifica a solução encontrada.

2.1 $1-2(b-3)+5=8b$ **2.2** $1+(-0{,}7c-3{,}4)-2{,}3(c+5)=-10$

3. Resolve as equações e apresenta o conjunto-solução:

3.1 $\frac{x-2}{5}=5$ **3.2** $\frac{2n-1}{5}-1=\frac{n}{3}$

3.3 $\frac{m-2}{4}=3-\frac{m-8}{8}$ **3.4** $\frac{2(x-3)}{3}-1=\frac{x-2}{2}$

3.5 $\frac{4z}{5}-\frac{1+2z}{15}=-(z-3)$ **3.6** $0{,}3y-4=\frac{5-2y}{3}+0{,}4$

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS RECORRENDO A EQUAÇÕES

Considera o seguinte problema:
O dobro de um número subtraído de 20 é igual a 100. Qual é o número?
Para resolvermos o problema, temos os seguintes passos:

- escolher a incógnita;
- traduzir o problema em equação;
- resolver a equação obtida;
- analisar a solução e dar a resposta ao problema.

Resolução

$x \longrightarrow$ o número pretendido

$2x \longrightarrow$ o dobro desse número

$2x-20=100 \longrightarrow$ a equação que traduz o problema

Assim,

$2x-20=100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=100+20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=120 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{120}{2}$

$\Leftrightarrow x=60$

Verificação

Substituindo o x por 60 na equação $2x-20=100$ temos:

$2 \times 60-20=100$

$120-20=100$

$100=100$ proposição verdadeira

Resposta:

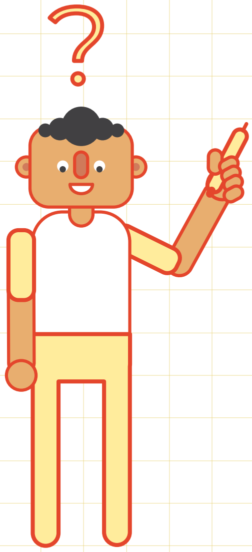
O número é igual a 60.

Considera agora o problema seguinte:

O Luís tem o triplo da idade da Antónia, mas daqui a 4 anos a soma das suas idades será 56 .
Que idade tem o Luís e que idade tem a Antónia, atualmente?

Resolução:
Representando por x a idade atual da Antónia, então $3x$ é a idade atual do Luís.
Daqui a 4 anos, a Antónia terá $x + 4$ anos e o Luís $3x + 4$
Como daqui a 4 anos, a soma das idades será 56 anos, vem:
$x + 4 + 3x + 4 = 56 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x + 3x = 56 - 4 - 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x = 48$
$\Leftrightarrow x = 12$

Concluímos que a Antónia tem 12 anos e o Luís, 36 anos
Daqui a 4 anos, a Antónia terá 16 anos e o Luís, 40 anos, sendo que a soma 16 + 40 = 56 anos.



ATIVIDADES

I. Completa o quadro

Linguagem corrente	Linguagem matemática
Três números inteiros consecutivos.	$x, \quad x+1, \quad x+2$
Três números pares consecutivos.	
Três números ímpares consecutivos.	$2x+1, \quad 2x+3, \quad 2x+5$
A diferença entre um número e a sua metade.	$x - \frac{x}{2}$
A idade há 4 anos.	
O quádruplo da soma de um número com outro.	$4(x+y)$

II. Resolve os problemas:

1. Qual é o número que adicionado a 5 é igual à sua metade mais 7 ?
2. A diferença entre o triplo de um número e 40 é igual à soma da sua metade com 20. Qual é esse número?
3. A soma entre três números inteiros consecutivos é igual a 369. Determina o maior deles.

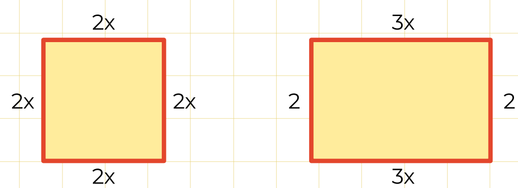
4. Três números pares consecutivos somam 702. Determina o menor deles.

5. Três números ímpares e consecutivos somam 831. Determina o maior deles.

6. A soma de um número com sua terça parte é igual à metade desse número acrescida de 30. Qual é esse número?

7. O Manuel tem 29 anos e o primo tem 16 anos. Há quantos anos a idade do Manuel era o dobro da idade do primo?

8. Na figura estão representados um quadrado e um retângulo.

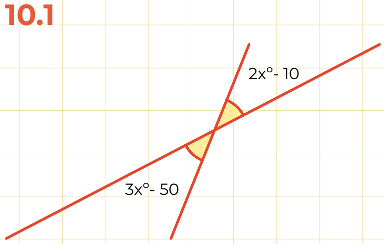


8.1 Escreve uma expressão para representar:
8.1.1 o perímetro do quadrado;
8.1.2 o perímetro do retângulo.
8.2 Determina o valor de x, sabendo que o perímetro do quadrado é igual ao perímetro do retângulo.

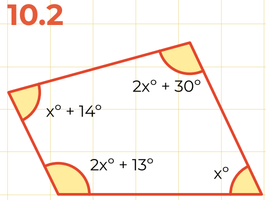
9. O perímetro de um retângulo é de 48 metros.
As medidas dos comprimentos dos lados são dois números ímpares consecutivos.
Qual a medida do comprimento de cada um dos lados do retângulo?

10. Observa as figuras e determina x.

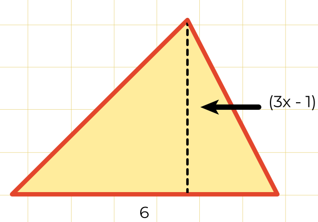
10.1



10.2



10.3 A = 15,9cm^2



11. Inventa o enunciado de um problema para cada uma das seguintes equações:

11.1 $2x - 1 = 15$

11.2 $\frac{y}{3} + 4 = 3y$

11.3 $4(a + 3) = 20$

EQUAÇÕES LITERAIS

Observa as equações:

$3x + 7 = 0$ $\qquad$ $3x + 7y = 1$

Repara que a primeira tem só uma incógnita, enquanto que a segunda tem mais do que uma.

Equações literais são aquelas que têm mais do que uma variável.

Exemplos de equações literais:

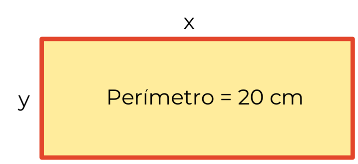
$y = 6x + 2$ $\qquad$ $3x + y - z = 4$

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES LITERAIS

Os princípios para resolver equações também se aplicam à resolução de uma equação literal, em ordem a qualquer uma das variáveis que nela figuram. Basta considerar as outras variáveis como quantidades fixas.

Exemplo I

Observa a figura:



A figura sugere a seguinte equação

$2x + 2y = 20$

Como a equação tem duas variáveis, x e y, podemos resolvê-la em ordem a x ou em ordem a y.

Vamos resolver a equação em ordem a x, por exemplo.

$2x + 2y = 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 20 - 2y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{20 - 2y}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 10 - y$

Neste caso, se a medida da largura do retângulo (y) for $4\ cm$, a medida do comprimento, x, será, $x = 10\ cm - 4\ cm = 6\ cm$

Tenta agora, resolver a mesma equação em ordem a y.

Exemplo II

Resolve a equação, em ordem a b,

$$\frac{5}{3}(b - 1) = \frac{b}{2} + a$$

Neste caso, a incógnita é b. A letra "a" funciona como um número.

$$\frac{5}{3}(b-1) = \frac{b}{2} + a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5b}{3} - \frac{5}{3} = \frac{b}{2} + a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5b}{3} - \frac{b}{2} = a + \frac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10b-3b}{6} = \frac{6a}{6} + \frac{10}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7b = 6a + 10 \Leftrightarrow$$

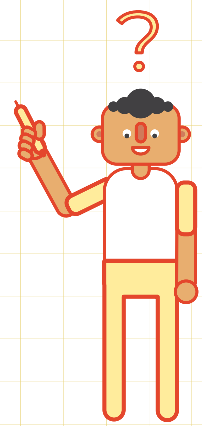
$$\Leftrightarrow b = \frac{6a-10}{7}$$

ATIVIDADES

1. Resolve cada uma das seguintes equações, em ordem à letra indicada dentro de parênteses:

1.1 $t = x + 4 \quad (x)$ **1.2** $v + 0{,}5 = \frac{x}{2} \quad (x)$ **1.3** $2x + 5y = x \quad (x)$

1.4 $\frac{9C}{5} = F - 32 \quad (C)$ **1.5** $V = RI \quad (I)$ **1.6** $A = \frac{B-a}{2}h \quad (h)$



2. Considera a equação literal $x + y(y-1) - 2x = a(a+2)$

2.1 Resolve a equação em ordem a x.

2.2 Determina o valor de x se $a = 2$ e $y = -3$

3 Considera a equação literal $V - \frac{5T}{3} = 455$.

3.1 Resolve a equação em ordem a T.

3.2 Qual é o valor de V, quando $T = 30$?

4. Num retângulo de perímetro P *cm*, o lado menor mede menos 3 *cm* que o lado maior, que mede x cm.

4.1 Escreve a expressão simplificada para o perímetro do retângulo.

4.2 Prova que $x = \frac{6+P}{4}$

4.3 Supondo que $P = 202$ *cm*, determina os comprimentos do lado maior e do lado menor do retângulo.

5. A fórmula $S = 180(n-2)$ permite determinar a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono. Sendo:

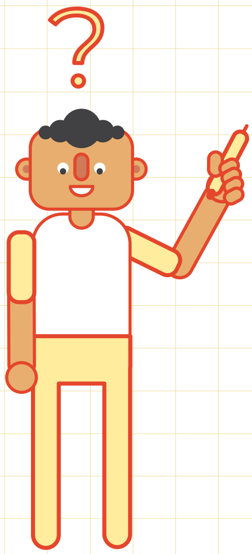
- S soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono
- n número de lados do polígono.

5.1 Prova que a soma das amplitudes dos ângulos internos:

5.1.1 de um triângulo é 180°. **5.1.2** de um quadrilátero é 360°.

5.2 Resolve a fórmula dada em ordem a n.

ATIVIDADES DE CONSOLIDAÇÃO



1. Qual das seguintes expressões é um monómio?

(A) $x + 4$ **(B)** $-9x^2y^3z$ **(C)** $a + 2x$ **(D)** $\frac{x^2 - y}{3}$

2. O coeficiente do monómio $-\frac{y}{2}$ é:

(A) -1 **(B)** -2 **(C)** 2 **(D)** $-\frac{1}{2}$

3. O monómio $4x^3y^4z$ tem grau:

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 7 **(D)** 8

4. O valor numérico da expressão $\frac{x^2}{x+2}$, quando $x = \frac{1}{2}$ é:

(A) 0,1 **(B)** $\frac{2}{5}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

5. Em qual das alíneas se encontram duas equações?

(A) $-2(x-3) = 0\ ;\ 4\left(2 - \frac{1}{2}\right) = -2$ **(B)** $\frac{x}{3} + 1 = 0\ ;\ 2(x+1) = -x$

6. O valor $\frac{1}{2}$ é solução da equação:

(A) $x - 1 = 2x + \frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} = x$ **(C)** $2x - (x-1) = \frac{1}{2}$ **(D)** $3(x-1) = 2x$

7. Em qual das alíneas se encontram duas equações equivalentes?

(A) $x - \frac{x-1}{2} = 1;\quad 3x = 2$ **(B)** $-\frac{2}{3}x = \frac{1}{2};\quad \frac{x-2x}{2} = x + 2$

(C) $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{x}{4} - 1;\quad 3 = 2x + 1$ **(D)** $0{,}1x + 2 = 0{,}1;\quad 4x = 2x$

8. Dos alunos de uma turma, $\frac{3}{5}$ são rapazes e os restantes 10 são raparigas.
Quantos alunos tem a turma?

(A) 28 **(B)** 22 **(C)** 24 **(D)** 25

9. Se a um número adicionarmos a sua metade, obtemos o mesmo resultado que se ao triplo do número subtrairmos nove unidades. Qual é o número?
A equação que resolve este problema é:

(A) $x + \frac{x}{2} = 3x - 9$ **(B)** $x + \frac{1}{2} = 3x - 9$ **(C)** $x + \frac{x}{2} = 3(x-9)$ **(D)** $\frac{x+1}{2} = 3x - 9$

10. A equação $\frac{x}{2} = y - 2$ resolvida em ordem a y é:

(A) $y = \frac{3x}{2}$ **(B)** $y = \frac{x-6}{2}$ **(C)** $y = 2 + \frac{x}{2}$ **(D)** $y = \frac{6+x}{2}$

Hino Nacional
Cântico da Liberdade

Canta, irmão
canta, meu irmão
que a Liberdade é hino
e o Homem a certeza.

Com dignidade, enterra a semente
no pó da ilha nua;
no despenhadeiro da vida
a esperança é do tamanho do mar
que nos abraça.
Sentinela de mares e ventos
perseverante
entre estrelas e o Atlântico
entoa o cântico da liberdade.

Canta, irmão
canta, meu irmão
que a Liberdade é hino
e o Homem a certeza.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
GOVERNO DE CABO VERDE
A TRABALHAR PARA TODOS.